



Vitor Hugo Lopes Branco

**Punção em Lajes Lisas Unidirecionais
de Concreto Armado com Diferentes
Taxas de Armadura Secundária e Pilares
retangulares**

TESE DE DOUTORADO

Instituto de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil

Tese orientada pelo Professor Dr. Dênio Ramam Carvalho de
Oliveira

Belém – Pará – Brasil
29 de setembro de 2022

Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



Vitor Hugo Lopes Branco

**Punção em Lajes Lisas Unidirecionais de Concreto Armado com
Diferentes Taxas de Armadura Secundária e Pilares retangulares**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira

Belém
quinta-feira, 29 de setembro de 2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

B816p Branco, Vitor Hugo Lopes.
Punção em lajes lisas unidirecionais de concreto armado com diferentes taxas de armadura secundária e pilares retangulares / Vitor Hugo Lopes Branco. — 2022. 218 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Denio Ramam Carvalho de Oliveira
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, 2022.

1. Punção. 2. Concreto armado. 3. Laje lisa. 4. Unidirecional. I. Título.

CDD 620.137



Punção em Lajes Lisas Unidirecionais de Concreto Armado com Diferentes Taxas de Armadura Secundária e Pilares retangulares

Vitor Hugo Lopes Branco

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Aprovada em 29 / 09 / 2022 pela banca composta por:

Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira (Orientador/UFPA)

Prof. Dr. Alcebiades Negrão Macêdo (Interno/UFPA)

Prof. Dr. Ricardo José Carvalho Silva (Externo/UVA)

Visto em 29 / 09 / 2022 por:

Prof. Dr. Marcelo de Souza Picanço (Coordenador PPGEC/UFPA)

Àquela que virá... nossa filha Diana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu estimado orientador desde a graduação, professor Dênio Ramam Carvalho de Oliveira, pela dedicação nos ensinamentos e orientação desta tese.

Aos professores Alcebiades Macêdo e Ricardo Carvalho, pelos conhecimentos transmitidos, disponibilidade e interesse prestados, bem como pelas sugestões valiosas durante a defesa.

Aos amigos do grupo GAEMA/UFPA, pelo caminho da amizade de Paulo Victor, Paulo Mota, Carlos Rossi e Renan Ribeiro. E, carinhosamente, aos padrinhos Amaury Aguiar, Leonardo Lago e a madrinha Natasha Costa, que sempre estiveram ao meu lado.

Ao IFPA, pelo apoio e incentivo à qualificação profissional e, mais especificamente, aos colegas de trabalho e amigos Anderson Cardoso, Regis Santos e Eurico Fontes, meu muito obrigado por tudo.

Aos meus pais Paulo e Sandra Branco pelo alicerce, ao meu irmão Ewerton Branco pela inspiração e pelo círculo familiar que rodeia minha vida. E sem esquecer, especialmente à minha amada esposa Danielly Lopes Branco pelo amor, incentivo e companheirismo infindáveis durante todas as etapas desta pesquisa.

Por fim obrigado, Senhor Jesus Cristo.

RESUMO

BRANCO, V. H. L. Punção em Lajes Lisas Unidirecionais de Concreto Armado com Diferentes Taxas de Armadura Secundária e Pilares retangulares. Tese de Doutorado, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil. 2022.

Visando avaliar o comportamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado à punção, foram analisadas experimentalmente 9 lajes submetidas a puncionamento simétrico. As lajes de dimensões de (1800 x 1800 x 120) mm receberam carregamento aplicado através de pilares de três tipos: A (85 × 85) mm, B (85 × 255) mm e C (85 × 425) mm. Todas foram confeccionadas com armadura de flexão principal constante de 1% (ρ_x) e diferentes taxas de armadura de flexão secundária (ρ_y), sendo: tipo 1 (0,5%), tipo 2 (1%) e tipo 3 (2%) aproximadamente. Concreto de resistência à compressão 28 MPa e módulo de elasticidade de 27 GPa. Armadura de tensão de escoamento de 573 MPa e módulo de elasticidade de 244 GPa. O trabalho teve como principais variáveis o índice de retangularidade dos pilares (c_{max}/c_{min}) e a taxa de armadura na direção secundária, objetivando avaliar a influência que exercem na resistência última ao puncionamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado. Os resultados experimentais foram comparados com quatro normas vigentes: ACI 318 (2019), EC2 (2004), MC 2010 (2011) e NBR 6118 (2014). Também foram comparados com os resultados obtidos a partir de uma análise numérica não linear realizada através do software ABAQUS CAE 6.14, com base no Método dos Elementos Finitos (*FEM*) e no modelo de Dano do Concreto (*CDP*). Os resultados indicaram que as normas precisam ser atualizadas, e que há o aumento da resistência ao puncionamento proporcional ao aumento da taxa de até 2% de armadura secundária, ampliando a resistência à punção das lajes em até 50% aproximadamente.

Palavras-chave: Punção, Concreto Armado, Laje lisa, Unidirecional.

ABSTRACT

BRANCO, V. H. L. Punching Failure in One-Way Reinforced Concrete Flat Slabs with Different Secondary Reinforcement Ratios and Rectangular Columns. Doctoral Dissertation, Institute of Technology, Federal University of Pará, Belém, Pará, Brazil. 2022.

Symmetric punching tests and experimental analyses were conducted to evaluate the behavior of nine one-way reinforced concrete flat slabs. The slabs measured (1800 x 1800 x 120) mm, and loads were applied through three types of columns: A (85 × 85) mm, B (85 × 255) mm and C (85 × 425) mm. All slabs were made with constant longitudinal reinforcement ratio at around 1% (ρ_x) and different secondary flexural reinforcement ratios (ρ_y), namely type 1 (0.5%), type 2 (1%) and type 3 (2%), approximately. Concrete compressive strength of 28 MPa and elasticity modulus of 27 GPa. Reinforcement yield stress of 573 MPa and elasticity modulus of 244 GPa. Column rectangularity index (c_{max}/c_{min}) and secondary reinforcement ratio were the main research variables, and the present study evaluated their influence on the ultimate punching strength of the sampled one-way reinforced concrete flat slabs. The experimental results were compared with four current international standards: ACI 318 (2019), EC2 (2004), MC 2010 (2011) and NBR 6118 (2014). They were also compared with the findings from a nonlinear numerical analysis made with the software ABAQUS CAE 6.14, based on the Finite Element Method (*FEM*) and on the Concrete Damage Plasticity (*CDP*) model. The results indicated that the standards need to be updated, and that there is a proportional increase of up to 50% approximately in slab punching strength when the secondary reinforcement ratio is increased by up to 2%.

Keywords: Punching; Reinforced Concrete; Flat Slab; One-way.

SUMÁRIO

CAPÍTULO	PÁGINA
1. Introdução	22
1.1. Considerações gerais	22
1.2. Acidentes estruturais	24
1.3. Justificativa	28
1.4. Objetivos	30
1.4.1. Objetivo geral	30
1.4.2. Objetivos específicos	30
2. Revisão bibliográfica	31
2.1. Mecanismos de resistência à punção	34
2.2. Métodos de previsão	37
2.2.1. Kinnunen e Nylander (1960)	38
2.2.2. Muttoni e Schwartz (1991)	39
3. Trabalhos realizados	40
3.1. Takahashi e Kakuta (1983)	40
3.2. Regan e Rezai-Jorabi (1988)	42
3.3. Oliveira (2003)	44
3.4. Ferreira (2006)	46
3.5. Carvalho (2006)	48
3.6. Vilhena <i>et al.</i> (2006)	50
3.7. Damasceno (2007)	52
4. Recomendações normativas	55
4.1. ACI 318 (2019)	58
4.2. EUROCODE 2 (2004)	59
4.3. NBR 6118 (2014)	60
4.4. MODEL CODE 2010 (2011)	61
4.4.1. Teoria da fissura crítica de cisalhamento (2008)	62

5.	Programa experimental	63
5.1.	Materiais	70
5.1.1.	Aço	70
5.1.2.	Concreto	71
5.2.	Instrumentação	72
5.2.1.	Deformações	72
5.2.2.	Deslocamentos	75
5.2.3.	Fissuração	76
5.3.	Sistema de ensaio	77
5.4.	Sistema de aquisição de dados	79
6.	Resistência à flexão	80
6.1.	Critérios para os modos de ruptura	81
6.2.	Modelo de previsão para os modos de ruptura	82
7.	Resultados experimentais	86
7.1.	Propriedades dos materiais	86
7.1.1.	Aço	86
7.1.2.	Concreto	87
7.2.	Deformações	88
7.2.1.	Deformações de tração	88
7.2.2.	Deformações de compressão	94
7.3.	Deslocamentos verticais	98
7.4.	Mapas de fissuração	104
7.5.	Superfície de ruptura	109
7.6.	Análise dos resultados experimentais	116
8.	Modelagem computacional	119
8.1.	Propriedades dos materiais e resistência do concreto	119
8.2.	Estado de tensão uniaxial dos materiais	120
8.2.1.	Compressão	120
8.2.2.	Tração	123
8.3.	Método dos elementos finitos (<i>FEM</i>) e dano do concreto (<i>CDP</i>)	125
8.4.	Modelagem	130

8.5.	Resultados computacionais	139
8.5.1.	Dano do concreto	140
8.5.2.	Corte das lajes	144
8.5.3.	Deformações da armadura principal	147
8.5.4.	Deformação da armadura secundária	151
8.5.5.	Condição deformada das lajes	155
8.5.6.	Deslocamentos verticais das lajes	159
8.6.	Análise dos resultados computacionais	163
8.7.	Banco de dados computacional	165
9.	Banco de dados experimental	170
9.1.	Banco de dados experimental	171
9.2.	Análise das normas	175
10.	Hipótese e teoria proposta	180
10.1.	Regressão não linear	180
10.2.	Equação proposta	185
11.	Conclusões	190
11.1.	Programa experimental	190
11.2.	Programa computacional	192
11.3.	Normas técnicas	192
11.4.	Contribuições para a estimativa de resistência	193
11.5.	Recomendações para trabalhos futuros	194
12.	Referências	195
13.	Anexos	206
13.1.	Memória de cálculo das lajes	206
13.2.	Dados da modelagem <i>FEM-CDP</i>	212
13.3.	Análise gráfica das nove lajes experimentais	218

LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁGINA
Tabela 3.1 – Lajes ensaiadas (REGAN e REZAI-JORABI, 1988).....	43
Tabela 3.2 – Características das lajes de Oliveira (2003).....	45
Tabela 3.3 – Fatores e flexão de Oliveira (2003)	46
Tabela 3.4 – Características das lajes de Ferreira (2006).....	47
Tabela 3.5 – Lajes sem armadura de cisalhamento ensaiadas por Carvalho (2006)	50
Tabela 3.6 – Cargas e modos de ruptura de Vilhena <i>et al.</i> (2006)	52
Tabela 3.7 – Características das lajes de Damasceno (2007).....	53
Tabela 5.1 – Características das lajes	64
Tabela 6.1 – Propriedades consideradas.....	83
Tabela 6.2 – Previsão de modos de ruptura (teóricos)	85
Tabela 7.1 – Propriedades do aço.....	86
Tabela 7.2 – Propriedades do concreto.....	87
Tabela 7.3 – Síntese do seccionamento das lajes (x).....	114
Tabela 7.4 – Síntese do seccionamento das lajes (y).....	115
Tabela 7.5 – Cargas e modos de ruptura experimentais.....	117
Tabela 7.6 – Cargas e modos de ruptura relativos à P_u	118
Tabela 8.1 – Parâmetros de Navarro, Ivorra e Varona (2018) para o FEM-CDP	131
Tabela 8.2 – Parâmetros do concreto calibrados aplicados na modelagem FEM-CDP	135
Tabela 8.3 – Carga última das lajes a partir da análise não linear.....	163
Tabela 8.4 – Comparação das cargas últimas a partir da análise não linear.....	164
Tabela 8.5 – Modelos computacionais realizados	166
Tabela 9.1 – Banco de dados de lajes lisas unidirecionais de concreto armado.....	173
Tabela 9.2 – Adaptação do critério de Collins (2001) - DPC.....	175
Tabela 9.3 – Classificação segundo o critério de Collins (2001) – DPC	176
Tabela 10.1 – Desempenho estatístico de $P_{computacional}$ / $P_{teorico}$ dos modelos de regressão	183
Tabela 10.2 – Resumo dos resultados do <i>BD</i> experimental	186
Tabela 10.3 – Resumo dos resultados das nove lajes	188

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
Figura 1.1 – Ensaio de sapatas (TALBOT, 1913).....	22
Figura 1.2 – Lajes lisas unidirecionais: a) em edifícios; b) em túneis (adaptado de TASSINARI <i>et al.</i> , 2011).....	23
Figura 1.3 – Prédio localizado em Boston, Massachussetts (KING e DELATTE, 2004)...	24
Figura 1.4 – Prédio Pipers Row Car Park, Wolverhampton, Reino Unido (WOOD, 1997)25	
Figura 1.5 – Passarela de pedestres em Miami, Florida (RAN CAO, EL-TAWIL e AGRAWAL, 2020)	25
Figura 1.6 – Vista do nó 11/12	26
Figura 1.7 – Corte do nó 11/12.....	26
Figura 1.8 – Shopping Rio Poty (PEREIRA FILHO <i>et al.</i> , 2019).....	27
Figura 1.9 – Condomínio Grand Parc (ABECE, 2018).....	27
Figura 2.1 – Ruptura de viga chata (LUBELL <i>et al.</i> , 2006).....	32
Figura 2.2 – Puncionamento e cisalhamento	32
Figura 2.3 – Fissuras radiais e tangenciais em lajes lisas	34
Figura 2.4 – Treliças espaciais usadas no modelo de Alexander e Simmonds (1987) (adaptado).....	35
Figura 2.5 – Fissura crítica e rotação da laje	36
Figura 2.6 – Curva carga × rotação da laje com armaduras longitudinais: a) no regime elástico; b) início do escoamento; c) escoamento total.	36
Figura 3.1 – Esquema de ensaio de Takahashi e Kakuta (1983) (mm).....	41
Figura 3.2 – Comportamento das lajes de Takahashi e Kakuta (1983).....	42
Figura 3.3 – Ensaio de Regan e Rezai-Jorabi (1988) (mm).....	43
Figura 3.4 – Sistema de ensaio de Oliveira (2003) (mm).....	44
Figura 3.5 – Detalhe das lajes L1a, L1b e L1c (FERREIRA, 2006) (mm).....	47
Figura 3.6 – Ensaio de Carvalho (2006)	49
Figura 3.7 – Sistema de ensaio e armaduras das lajes (VILHENA <i>et al.</i> , 2006)	50
Figura 3.8 – Modos de ruptura das lajes de Vilhena <i>et al.</i> (2006).....	51
Figura 3.9 – Lajes de Damasceno (2007)	52
Figura 4.1 – Perímetros de controle das normas estudadas.....	56
Figura 5.1 – Detalhe da ancoragem da armadura principal (mm).....	64
Figura 5.2 – Armaduras L1A (mm).....	64

Figura 5.3 – Armaduras L1B (mm).....	65
Figura 5.4 – Armaduras L1C (mm).....	65
Figura 5.5 – Armaduras L2A (mm).....	66
Figura 5.6 – Armaduras L2B (mm).....	66
Figura 5.7 – Armaduras L2C (mm).....	67
Figura 5.8 – Armaduras L3A (mm).....	67
Figura 5.9 – Armaduras L3B (mm).....	68
Figura 5.10 – Armaduras L3C (mm).....	68
Figura 5.11 – Seção e armadura dos pilares A, B e C (mm).....	69
Figura 5.12 – Espessura da laje em corte (cm).....	69
Figura 5.13 – Ensaio de tração das armaduras	70
Figura 5.14 – Moldagem dos corpos de prova	71
Figura 5.15 – Ensaio de compressão axial, módulo de elasticidade e compressão diametral	72
Figura 5.16 – <i>Strain gauges</i> do concreto (Lajes: L1A, L1B e L1C) (mm).....	72
Figura 5.17 – <i>Strain gauges</i> do concreto (Lajes: L2A, L2B e L2C) (mm).....	73
Figura 5.18 – <i>Strain gauges</i> do concreto (Lajes: L3A, L3B e L3C) (mm).....	73
Figura 5.19 – <i>Strain gauges</i> do aço (Lajes: L1A, L1B e L1C) (mm)	74
Figura 5.20 – <i>Strain gauges</i> do aço (Lajes: L2A, L2B e L2C) (mm)	74
Figura 5.21 – <i>Strain gauges</i> do aço (Lajes: L3A, L3B e L3C) (mm)	75
Figura 5.22 – Posicionamento dos LVDT em planta (a) e em perspectiva (b) (mm)	75
Figura 5.23 – Cortes de lajes ensaiadas à punção (EINPAUL, 2016).....	76
Figura 5.24 – Padrões de fissuração de lajes ensaiadas à punção (TASSINARI <i>et al.</i> , 2011)	76
Figura 5.25 – Sistema de ensaio	77
Figura 5.26 – Detalhe frontal do sistema de ensaio (mm).....	78
Figura 5.27 – Detalhe lateral do sistema de ensaio (mm)	78
Figura 5.28 – Perspectiva do sistema de ensaio	78
Figura 5.29 – Sistema de aquisição de dados e notebook	79
Figura 5.30 – Sistema de aplicação de carga.....	79
Figura 6.1 – Linhas de ruptura adotadas	80
Figura 6.2 – Previsão dos modos de ruptura	83
Figura 6.3 – Previsão dos modos de ruptura com o fator de flexão de Oliveira (2003).....	84
Figura 7.1 – Diagramas dos aços utilizados	86

Figura 7.2 – Diagrama do concreto utilizado	87
Figura 7.3 – Posição dos extensômetros instalados nas armaduras.....	88
Figura 7.4 – Critério de ruptura adotado com armaduras: $A_s(p)$ – direção principal; $A_s(s)$ – direção secundária).....	89
Figura 7.5 – Laje L1A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	91
Figura 7.6 – Laje L2A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	91
Figura 7.7 – Laje L3A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	91
Figura 7.8 – Laje L1B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	92
Figura 7.9 – Laje L2B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	92
Figura 7.10 – Laje L3B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	92
Figura 7.11 – Laje L1C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	93
Figura 7.12 – Laje L2C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	93
Figura 7.13 – Laje L3C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y).....	93
Figura 7.14 – Posição dos extensômetros instalados no concreto.....	94
Figura 7.15 – Laje L1A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	95
Figura 7.16 – Laje L2A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	95
Figura 7.17 – Laje L3A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	95
Figura 7.18 – Laje L1B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	96
Figura 7.19 – Laje L2B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	96
Figura 7.20 – Laje L3B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	96
Figura 7.21 – Laje L1C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	97
Figura 7.22 – Laje L2C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	97
Figura 7.23 – Laje L3C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y).....	97
Figura 7.24 – Posição dos transdutores em planta	98
Figura 7.25 – Posição dos transdutores em corte	98

Figura 7.26 – Deslocamentos da laje L1A	99
Figura 7.27 – Deslocamentos da laje L2A	99
Figura 7.28 – Deslocamentos da laje L3A	99
Figura 7.29 – Deslocamentos da laje L1B.....	100
Figura 7.30 – Deslocamentos da laje L2B.....	100
Figura 7.31 – Deslocamentos da laje L3B.....	100
Figura 7.32 – Deslocamentos da laje L1C.....	101
Figura 7.33 – Deslocamentos da laje L2C.....	101
Figura 7.34 – Deslocamentos da laje L3C.....	101
Figura 7.35 – Rigidez efetiva das lajes (taxa de armadura em %)	102
Figura 7.36 – Índice de ductilidade	103
Figura 7.37 – Mapa de fissuração L1A (— tangencial — radial)	106
Figura 7.38 – Mapa de fissuração L2A (— tangencial — radial)	106
Figura 7.39 – Mapa de fissuração L3A (— tangencial — radial)	106
Figura 7.40 – Mapa de fissuração L1B (— tangencial — radial).....	107
Figura 7.41 – Mapa de fissuração L2B (— tangencial — radial).....	107
Figura 7.42 – Mapa de fissuração L3B (— tangencial — radial).....	107
Figura 7.43 – Mapa de fissuração L1C (— tangencial — radial).....	108
Figura 7.44 – Mapa de fissuração L2C (— tangencial — radial).....	108
Figura 7.45 – Mapa de fissuração L3C (— tangencial — radial).....	108
Figura 7.46 – Plano de corte das lajes em destaque hachurado (mm).....	109
Figura 7.47 – Lajes seccionadas: a) tipo A; b) tipo B; c) tipo C	110
Figura 7.48 – Corte das lajes da série A lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm).....	111
Figura 7.49 – Corte das lajes da série A lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm).....	111
Figura 7.50 – Corte das lajes da série B lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm)	112
Figura 7.51 – Corte das lajes da série B lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm)	112
Figura 7.52 – Corte das lajes da série C lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm)	113
Figura 7.53 – Corte das lajes da série C lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm)	113
Figura 7.54 – Cargas últimas e armadura secundária (— tendência; - - - tendência ± 10%)	116
Figura 7.55 – Cargas últimas e índice de retangularidade (— tendência; - - - tendência ± 10%)	117
Figura 8.1 – Diferentes tipos de fissuração (BJORNSTROM <i>et al.</i> , 2006)	119
Figura 8.2 – Ensaio de compressão triaxial (MANG <i>et al.</i> , 2003)	120

Figura 8.3 – Resposta não linear do concreto à compressão (MODEL CODE 90, 1991)	121
Figura 8.4 – Módulo de elasticidade secante (MODEL CODE 2010, 2011).....	122
Figura 8.5 – Resposta não linear do concreto à tração (baseado em HORDIJK, 1992)....	123
Figura 8.6 – Resposta do aço à tração (MODEL CODE 90, 1991)	124
Figura 8.7 – Modelo constitutivo do estado biaxial de tensões (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)	126
Figura 8.8 – Função de <i>Drucker-Prager</i> (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)	126
Figura 8.9 – Ciclo assumindo valor padrão de restauração de rigidez (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)	127
Figura 8.10 – Curva de dano de compressão utilizada.....	129
Figura 8.11 – Curva de dano de tração utilizada.....	129
Figura 8.10 – Tipos de elementos usados na modelagem	130
Figura 8.11 – Deformação de um pilar: a) indeformado; b) deformado sem controle do efeito <i>hourglass</i> ; e c) deformado com o controle do efeito <i>hourglass</i> (JOLDES, WITTEK e MILLER, 2008).....	131
Figura 8.12 – f_{bo}/f_{c0} no Atena (KUPFER, HILSDORF E RUSCH, 1979) e no Abaqus (LEE E FENVES, 1998)	132
Figura 8.13 – Calibração do coeficiente de Poisson.....	133
Figura 8.14 – Calibração do Módulo de elasticidade	133
Figura 8.15 – Calibração da malha hexaédrica.....	134
Figura 8.16 – Calibração da malha tetraédrica	134
Figura 8.17 – Calibração do ângulo de dilatação	135
Figura 8.18 – Calibração da viscosidade.....	135
Figura 8.19 – Aplicação de deslocamento no software Abaqus CAE 6.14.....	136
Figura 8.20 – Aplicação de força no software Abaqus CAE 6.14.....	136
Figura 8.21 – Estudo paramétrico entre aplicação de força e deslocamento usando o método estático geral.....	137
Figura 8.22 – Modelos: a) laje completa ou 100%; b) ¼ da laje ou 25%	138
Figura 8.23 – Condições de contorno (modelagem de ¼ da laje).....	138
Figura 8.24 – Estudo paramétrico entre a modelagem da laje inteira e ¼ da laje.....	139
Figura 8.25 – Dano no concreto - L1A.....	141
Figura 8.26 – Dano no concreto – L2A	141
Figura 8.27 – Dano no concreto – L3A	141

Figura 8.28 – Dano no concreto - L1B.....	142
Figura 8.29 – Dano no concreto – L2B.....	142
Figura 8.30 – Dano no concreto – L3B.....	142
Figura 8.31 – Dano no concreto - L1C.....	143
Figura 8.32 – Dano no concreto – L2C.....	143
Figura 8.33 – Dano no concreto – L3C.....	143
Figura 8.34 – Dano em corte das lajes do grupo A: a) L1A; b) L2A; c) L3A.....	144
Figura 8.35 – Dano em corte das lajes do grupo B: a) L1B; b) L2B; c) L3B.....	145
Figura 8.36 – Dano em corte das lajes do grupo C: a) L1C; b) L2C; c) L3C.....	146
Figura 8.37 – Deformação da armadura principal - L1A (MPa).....	147
Figura 8.38 – Deformação da armadura principal – L2A (MPa).....	147
Figura 8.39 – Deformação da armadura principal – L3A (MPa).....	148
Figura 8.40 – Deformação da armadura principal - L1B (MPa).....	148
Figura 8.41 – Deformação da armadura principal – L2B (MPa).....	148
Figura 8.42 – Deformação da armadura principal – L3B (MPa).....	149
Figura 8.43 – Deformação da armadura principal - L1C (MPa).....	149
Figura 8.44 – Deformação da armadura principal – L2C (MPa).....	150
Figura 8.45 – Deformação da armadura principal – L3C (MPa).....	150
Figura 8.46 – Deformação da armadura secundária - L1A (MPa).....	151
Figura 8.47 – Deformação da armadura secundária – L2A (MPa).....	152
Figura 8.48 – Deformação da armadura secundária – L3A (MPa).....	152
Figura 8.49 – Deformação da armadura secundária - L1B (MPa).....	152
Figura 8.50 – Deformação da armadura secundária – L2B (MPa).....	153
Figura 8.51 – Deformação da armadura secundária – L3B (MPa).....	153
Figura 8.52 – Deformação da armadura secundária - L1C (MPa).....	153
Figura 8.53 – Deformação da armadura secundária – L2C (MPa).....	154
Figura 8.54 – Deformação da armadura secundária – L3C (MPa).....	154
Figura 8.55 – Deformada - L1A (mm).....	156
Figura 8.56 – Deformada – L2A (mm).....	156
Figura 8.57 – Deformada – L3A (mm).....	156
Figura 8.58 – Deformada - L1B (mm).....	157
Figura 8.59 – Deformada – L2B (mm).....	157
Figura 8.60 – Deformada – L3B (mm).....	157
Figura 8.61 – Deformada - L1C (mm).....	158

Figura 8.62 – Deformada – L2C (mm).....	158
Figura 8.63 – Deformada – L3C (mm).....	158
Figura 8.64 – Carga × Deslocamento – L1A (mm) – comp. – exp.	160
Figura 8.65 – Carga × Deslocamento – L2A (mm) – comp. – exp.	160
Figura 8.66 – Carga × Deslocamento – L3A (mm) – comp. – exp.	160
Figura 8.67 – Carga × Deslocamento – L1B (mm) – comp. – exp.....	161
Figura 8.68 – Carga × Deslocamento – L2B (mm) – comp. – exp.....	161
Figura 8.69 – Carga × Deslocamento – L3B (mm) – comp. – exp.....	161
Figura 8.70 – Carga × Deslocamento – L1C (mm) – comp. – exp.....	162
Figura 8.71 – Carga × Deslocamento – L2C (mm) – comp. – exp.....	162
Figura 8.72 – Carga × Deslocamento – L3C (mm) – comp. – exp.....	162
Figura 8.73 – Comportamento das lajes da série $\rho_x = 0,93\%$ (FEM-CDP).....	167
Figura 8.74 – Comportamento das armaduras principais da laje L0B (—) e L4B (- - -) (FEM-CDP).....	167
Figura 8.75 – Comportamento das lajes da série $\rho_x = 1,53\%$ (FEM-CDP).....	168
Figura 8.76 – Comportamento das armaduras principais da laje L0BX (—) e L4BX (- - -) (FEM-CDP).....	168
Figura 8.77 – Influência de ρ_y na carga última e na tensão das lajes computacionais.....	169
Figura 8.78 – Influência de i em carga última e tensão das lajes computacionais.....	169
Figura 9.1 – Dispersão dos resultados ACI 318 (2019).....	177
Figura 9.2 – Dispersão dos resultados do EC2 (2004).....	177
Figura 9.3 – Dispersão dos resultados do MC2010 (2011).....	178
Figura 9.4 – Dispersão dos resultados de NBR 6118 (2014).....	178
Figura 9.5 – Boxplot de todas as prescrições estudadas.....	179
Figura 10.1 – Modelo de regressão não linear (Zeviani et al., 2013).....	180
Figura 10.2 – Comportamento gráfico do modelo I.....	184
Figura 10.3 – Comportamento gráfico do modelo II.....	184
Figura 10.4 – Comportamento gráfico do modelo III.....	184
Figura 10.5 – Evolução da tensão com a taxa de armadura secundária.....	185
Figura 10.6 – Comportamento dos modelos de regressão não linear.....	186
Figura 10.7 – Dispersão de resistência experimental × resistência teórica.....	187
Figura 10.8 – Comparação boxplot da proposta final.....	187

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

Símbolo	Significado
A_c	área bruta da seção transversal de concreto
A_s	área de aço da seção
A_{sw}	área total da armadura de cisalhamento da seção
l_x, l_y	largura da laje na direção considerada
d	altura útil
DP	desvio padrão
E_c	módulo de elasticidade do concreto
E_s	módulo de elasticidade das armaduras de flexão
f_c	resistência à compressão do concreto
f_{ct}	resistência à tração experimental do concreto
f_{ctk}	resistência à tração estimada teórica do concreto
f_u	tensão de ruptura das armaduras de flexão
f_{ys}	tensão de escoamento do aço da armadura de flexão
MA	média aritmética
b_0	perímetro crítico (ACI 318)
b_1	perímetro básico de controle (Model Code 2010)
C, C'	contornos críticos da NBR 6118
d_g	diâmetro máximo do agregado graúdo
E_s	módulo de elasticidade da armadura longitudinal tracionada
f_c	resistência à compressão do concreto
f_{ck}	resistência à compressão característica do concreto
F_{Sd}	força ou reação concentrada
f_{yk}	tensão de escoamento característica da armadura longitudinal tracionada
m_{Rd}	momento resistente de cálculo por unidade de comprimento
m_{Sd}	momento solicitante médio de cálculo por unidade de comprimento
\emptyset	diâmetro das barras de aço
P_{NBR}	carga de ruptura estimada pela NBR 6118
P_{ACI}	carga de ruptura estimada pela ACI 318
P_{EC2}	carga de ruptura estimada pela Eurocode 2
P_{MC10}	carga de ruptura estimada pela Model Code 2010

P_{flex}	carga de ruptura por flexão
P_u	carga última de ruptura da laje
u	perímetro no contorno crítico C'
u_l	perímetro crítico (Eurocode 2)
ρ	taxa geométrica de armadura de flexão
ρ_y	taxa de armadura secundária
ρ_x	taxa de armadura principal
τ_{sd}	tensão solicitante no caso de puncionamento
y_c	distância entre o centro de gravidade da seção de concreto e a fibra mais tracionada
r	distância a partir do eixo do pilar
x	profundidade da linha neutra na seção
ϵ_c	deformação do concreto na seção
ϵ_s	deformação do aço na seção
ψ	rotação da laje a partir de seu eixo original

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Gerais

O sistema estrutural conhecido como laje lisa, em que as lajes são diretamente apoiadas sobre os pilares, oferece diversas vantagens técnicas em relação ao sistema tradicional. No entanto, também oferece desvantagens, como a possibilidade do modo de ruptura por punção da laje. A punção é um tipo de ruptura que pode ocorrer quando forças concentradas atuam diretamente sobre a laje e causam a sua perfuração (ligação laje-pilar).

O fenômeno do puncionamento em estruturas da construção civil tem sido estudado há pouco mais de um século. Um dos registros científicos mais antigos surgiu quando [Talbot \(1913\)](#) finalizou seus experimentos em sapatas de concreto armado (Figura 1.1) e propôs um método de dimensionamento para punção em termos de tensão nominal de cisalhamento em um dado perímetro crítico distante “ d ” da face do pilar. Posteriormente, [Graf \(1938\)](#) estudou o problema da punção em lajes sujeitas a carregamentos concentrados, seguido pela pesquisa de [Forsell e Holmberg \(1946\)](#) e também de [Elstner e Hognestad \(1956\)](#), que estudaram sobre o mesmo assunto e contribuíram para melhorar diversas recomendações normativas através de equações similares, divergentes apenas na definição do perímetro crítico a partir da face do pilar.

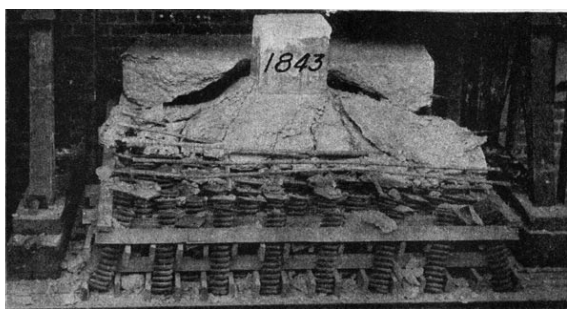


Figura 1.1 – Ensaio de sapatas ([TALBOT, 1913](#))

Ao longo de décadas mais recentes, diversos modelos analíticos foram propostos para prever o comportamento à punção de lajes lisas de concreto. Em [Kinnunen e Nylander \(1960\)](#), os autores propuseram equação, porém desconsideraram a variação da armadura de flexão na resistência à punção, o que foi verificado nos ensaios de [Hawkins, Falsen e Hinojosa \(1971\)](#), que adotaram variações no índice de retangularidade do pilar e na taxa de armadura de flexão em seus ensaios e comprovaram forte influência das mesmas. Posteriormente, foram introduzidos o método de

Regan (1982) e modelos semelhantes, como os de Shehata e Regan (1989). Além desses, foram propostos outros modelos, por exemplo, abordagem da plasticidade (BRASTUP *et al.*, 1976), modelo de engrenamento no cisalhamento (LOOV, 1978), modelo de treliça (ALEXANDER e SIMMONDS, 1987) e modelo baseado nas linhas de ruptura de Hognestad (1953). Todos eles dão uma indicação da complexidade do problema da punção em lajes de concreto armado.

As lajes lisas de concreto armado apoiadas sobre pilares sem capitel ou ábaco, são ocasionalmente utilizadas em sistemas estruturais de edifícios comerciais e residenciais por oferecer grande flexibilidade arquitetônica (Figura 1.2 a). Este é um sistema estrutural constituído por lajes que podem ser pré-moldadas e/ou protendidas, que estejam monoliticamente ou diretamente ligadas aos pilares. Mais ainda, esses elementos têm formas simples e de fácil e rápida execução. Lajes com elevada carga concentrada também podem ser encontradas em outros tipos de estruturas, assim como lajes de túneis e tabuleiros de pontes ou viadutos (Figura 1.2 b). Em muitos casos, são apenas armadas com ferragem longitudinal, sem nenhuma armadura transversal de combate à punção.

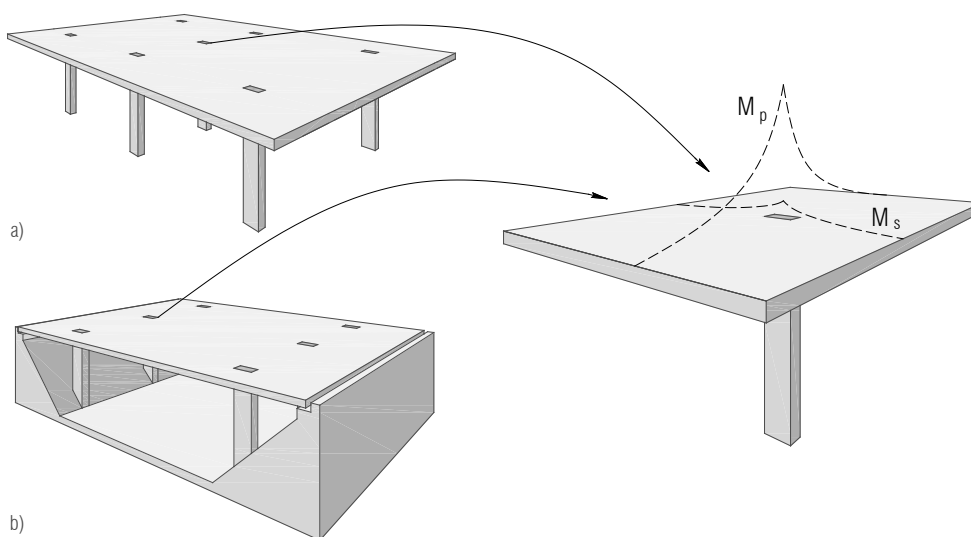


Figura 1.2 – Lajes lisas unidirecionais: a) em edifícios; b) em túneis (adaptado de TASSINARI *et al.*, 2011)

De acordo com Oliveira (2003), a resistência ao puncionamento e a resistência à flexão das lajes estão inter-relacionadas. A ruptura por flexão ocorre após elevadas deformações, dado o comportamento dúctil quando governado pela armadura longitudinal de tração; isso garante sinais de alerta para que sejam feitas as intervenções necessárias, em contraste com as deformações de cisalhamento, que são muito limitadas antes do colapso, o que torna a punção um modo estritamente perigoso de ruptura.

Já em pesquisas mais recentes, como a de [Lantsoght \(2013\)](#), verifica-se a influência da armadura longitudinal secundária (direção transversal) em casos de lajes unidirecionais e bidirecionais. Esse também é o caso do estudo de [Oliveira e Damasceno \(2015\)](#), em que foi percebida a influência da armadura longitudinal secundária na resistência ao puncionamento, apresentando ganhos de até 30% em comparação à laje de referência, o que foi comprovado experimentalmente e calculado pela análise aprimorada de [Oliveira e Ferreira \(2005\)](#). Assim, um melhor entendimento do fenômeno da punção se faz necessário, com ênfase no aprimoramento para métodos de cálculo mais precisos. A existência de diversas variáveis envolvidas faz deste um problema complexo que, em geral, é calculado por métodos baseados em resultados experimentais.

1.2. Acidentes estruturais

Em 25 janeiro de 1971, dois terços do prédio de 16 pavimentos desabaram durante a construção na Avenida Commonwealth em Boston, Massachusetts (Figura 1.3). Uma comissão presidida pelo prefeito da cidade indicou sinais de inconsistências no projeto, mais precisamente em relação à segurança estrutural. A baixa resistência do concreto e a concretagem inadequada em baixas temperaturas contribuíram para o puncionamento das lajes lisas da edificação; além disso, não foram colocados em prática a inspeção, controle de qualidade, planejamento e supervisão do projeto.



Figura 1.3 – Prédio localizado em Boston, Massachusetts ([KING e DELATTE, 2004](#))

Os problemas de dimensionamento, construção, degradação do concreto e corrosão das armaduras contribuíram para a ruptura da edificação localizada em Wolverhampton, Reino Unido em 1997, conforme mostrado na Figura 1.4. O colapso ocorreu na laje do último pavimento durante a noite, enquanto estava sujeita somente ao peso próprio. O puncionamento em um único pilar levou ao colapso progressivo dos demais pilares. Uma década antes da tragédia, patologias estruturais foram evidenciadas em diversas inspeções realizadas pela equipe técnica.



Figura 1.4 – Prédio Pipers Row Car Park, Wolverhampton, Reino Unido (WOOD, 1997)

Mais recentemente, pesquisadores como Cao, El-Tawil e Agrawal (2020) concluíram que o gatilho para o colapso da passarela da FIU (Florida International University), em Miami (EUA), em 2018, foi o puncionamento do tabuleiro na região de encontro da diagonal com a montante da treliça de concreto protendido (Figura 1.5). O NTSB (National Transportation Safety Board) afirmou que erros de cálculo de cargas atuantes no nó levaram à ruptura. Tais erros foram comprovados por verificações após a tragédia, que mostraram o dobro do valor que havia sido dimensionado anteriormente nas cargas.



Figura 1.5 – Passarela de pedestres em Miami, Florida (RAN CAO, EL-TAWIL e AGRAWAL, 2020)

É possível observar, na Figura 1.6, o local de ruptura da passarela de pedestres e, na Figura 1.7 o modo de ruptura característico de puncionamento do tabuleiro unidirecional da ponte, provocado pela protensão das diagonais de concreto e o consequente aumento da carga de compressão na ligação 11/12, de acordo com o relatório do NTSB report-HWY18MH009 (2019).



Figura 1.6 – Vista do nó 11/12

(Fonte: <https://www.nts.gov/investigations/Pages/HWY18MH009.aspx> - acessado em 02/12/2021)

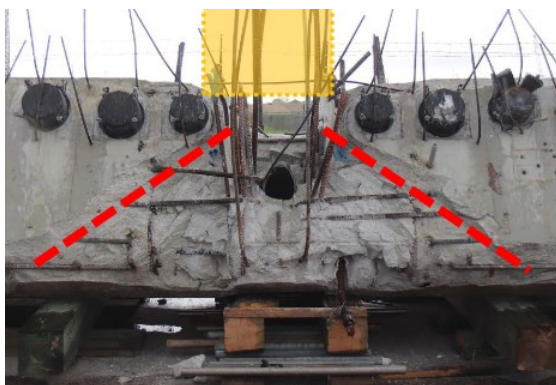


Figura 1.7 – Corte do nó 11/12

(Fonte: <https://www.ccaps.umn.edu/documents/cpe-conferences/structural/2021StructuralNTSB.pdf> –
acessado em 02/12/2021)

Já no Brasil, também existem tragédias de destaque com obras de construção civil e lajes lisas, como no caso de parte da obra do Shopping Rio Poty, localizado na Zona Norte de Teresina, que desabou em 2013. O relatório técnico, elaborado em parceria entre a construtora e o [CREA/PI](#), apontou causas devido a erro de escoramento das lajes que, por sua vez, levou à ruptura por punção e ao colapso progressivo de parte da obra, conforme ilustra a Figura 1.8 (Shopping Rio Poty. Relatório Técnico, [CREA/PI, Teresina. 2013](#)).



Figura 1.8 – Shopping Rio Poty ([PEREIRA FILHO et al, 2019](#))

A área de lazer do Grand Parc, em Vitória, desabou na madrugada do dia 19 de julho de 2016. A perícia da Polícia Civil apontou que a construção não obedeceu aos padrões de engenharia necessários para uma estrutura daquele porte. O laudo da [ABECE \(2018\)](#) concluiu que a espessura da laje na ligação laje-pilar foi insuficiente, dada a resistência do concreto e as dimensões dos pilares. Somados à ausência de armadura de punção e falta de armadura de combate ao colapso progressivo, todos esses fatores contribuíram de forma relevante para a tragédia mostrada na Figura 1.9.



Figura 1.9 – Condomínio Grand Parc ([ABECE, 2018](#))

1.3. Justificativa

Lajes unidirecionais sob carregamentos concentrados são geralmente dimensionadas de duas maneiras: calculando-se a resistência ao cisalhamento unidirecional com equações baseadas em experimentos de vigas ao longo de uma largura efetiva, e verificando-se a resistência ao puncionamento (cisalhamento bidirecional) ao longo de um perímetro crítico com equações baseadas em experimentos de lajes diretamente ligadas aos pilares.

Apenas um pequeno número de dados experimentais é encontrado atualmente na literatura. Assim, é necessário ensaiar mais espécimes desse tipo de problema e avaliar a taxa de armadura longitudinal secundária, o índice de retangularidade do pilar e a resistência do concreto, comparando-se os resultados experimentais com as principais normas e métodos vigentes.

Segundo [Ladner et al. \(1977\)](#), a resistência ao cisalhamento de lajes lisas bidirecionais (sobre pilares centrais) é maior do que em lajes unidirecionais (como é o caso de lajes sobre apoios lineares em duas bordas opostas). Os poucos experimentos em lajes contínuas sugerem que a capacidade portante da ligação laje-pilar pode ser ainda maior do que em elementos isolados. Desta forma, há indícios de que o aumento de rigidez e ductilidade talvez possa contribuir na resistência ao cisalhamento de lajes unidirecionais. Entretanto, conforme [Lantsoght, Van der Veen e Walraven \(2013\)](#), devido à escassa literatura, aos resultados experimentais e à compreensão ainda restrita sobre o comportamento da punção, esse acréscimo não tem sido considerado nas práticas de engenharia. Uma melhor interpretação do fenômeno é fundamental para o desenvolvimento de métodos de dimensionamento precisos e fisicamente representativos de estruturas, assim como para o aperfeiçoamento e a inovação em projetos de engenharia.

Testes recentes de punção em lajes unidirecionais como os de [Lubell et al. \(2006\)](#), [Damasceno \(2007\)](#) e [Lantsoght \(2013\)](#) comprovam a forte influência da armadura longitudinal secundária na resistência ao puncionamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado, inclusive apresentando aumento de resistência, mudança no padrão de fissuração e deslocamentos verticais. Esses resultados sugerem um comportamento semelhante ao de lajes bidirecionais, dado o aumento de rigidez da placa, proporcionado, dentre vários fatores, pela taxa de armadura de flexão. O trabalho de [Oliveira \(2003\)](#) reflete esse cenário, pois leva em consideração e associa os efeitos da flexão na resistência à punção da laje. Assim, é possível aumentar a ductilidade da laje através do aumento das dimensões do pilar e da taxa de armadura

longitudinal, verificando-se a possibilidade do puncionamento anterior ou posterior ao escoamento das armaduras, devido à formação das charneiras plásticas.

Além do mais, os códigos normativos vigentes, em geral, são pouco abrangentes no que diz respeito às variáveis já citadas, conduzindo a resultados superestimados ou subestimados, principalmente em relação a lajes sem armadura de cisalhamento e com pilares de seções alongadas.

1.4. Objetivos

1.4.1. OBJETIVO GERAL

Esta pesquisa faz uma contribuição inédita ao conhecimento acerca do fenômeno da punção em lajes lisas unidirecionais de concreto armado com cargas distantes do apoio ($a/d > 2,5$). Conforme citado anteriormente, existem muitas teorias recentes que podem, em alguns casos, conflitar com dimensionamentos de normas atuais. Além da taxa de armadura, o alongamento da seção transversal do pilar exerce forte influência na resistência à punção, conforme demonstrado experimentalmente por [Oliveira \(2003\)](#), [Carvalho \(2006\)](#) e, [Damasceno e Oliveira \(2015\)](#).

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Neste contexto, um vasto programa de pesquisa foi executado no Laboratório de Engenharia Civil ([LEC](#)) da Universidade Federal do Pará ([UFPA](#)) com o apoio do Grupo de Análise Experimental de Estruturas e Materiais ([GAEMA](#)). Foi analisada experimentalmente a influência de diferentes taxas de armadura, suas resistências últimas e modos de ruptura em nove (9) lajes lisas unidirecionais de concreto armado, de dimensões (1800 × 1800 × 120) mm, com taxa de armadura principal constante de 1%, e taxa de armadura secundária variável entre lajes com 0,5%, 1% e 2%, aproximadamente. As lajes foram apoiadas sobre três (3) tipos de pilares centrais (punção simétrica) de índice de retangularidade 1 (85 × 85 mm), 3 (85 × 255 mm) e 5 (85 × 425 mm) para cada taxa de armadura secundária. Neste estudo, foi possível:

- reunir e classificar, criteriosamente, um banco de dados experimental constante na literatura;
- analisar proposições teóricas e normativas mais relevantes constantes na literatura;
- realizar ensaios experimentais em 9 lajes lisas de concreto armado unidirecionais com diferentes taxas de armadura;
- comparar os resultados de análise numérica não linear por *FEM-CDP (Finite Elements Method – Concrete Damage Plasticity)* com aqueles obtidos experimentalmente;
- apresentar, por fim, um modelo de previsão de carga última de lajes lisas unidirecionais de concreto armado, sem armadura de cisalhamento, sujeitas à punção simétrica, considerando diferentes taxas de armadura de flexão secundária.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo traz uma visão geral do estado da arte na área e descreve alguns dos modelos analíticos existentes em relação ao comportamento de ligações laje-pilar. O objetivo desta revisão é descrever brevemente os modelos que inspiram ou influenciam a abordagem da presente tese.

Segundo [Ehmann \(2006\)](#) e [Zararis e Papadakis \(2001\)](#), nem todos os modelos para análise do comportamento de um elemento sujeito ao cisalhamento são baseados na soma de todas as contribuições dos mecanismos de resistência citados pelo [ACI-ASCE Committee 426 \(1973\)](#), que são os seguintes:

- *Efeito de arco (arching action)* - mecanismo que ocorre pela formação de um arco comprimido entre a carga e o apoio e de forma mais expressiva em vigas e lajes com vãos reduzidos, em geral, em uma relação $a/d < 2,5$;
- *Concreto não fissurado (cantilever action)* - mecanismo que ocorre em trechos não fissurados de lajes e vigas (entre duas fissuras consecutivas) ou em partes não fissuradas de elementos fissurados (zona de compressão de uma seção fissurada);
- *Engrenamento dos agregados (aggregate interlock)* - mecanismo que ocorre entre as duas superfícies originadas por uma fissura. A contribuição do engrenamento dos agregados para a resistência ao cisalhamento depende da abertura da fissura e da rugosidade das superfícies; logo, depende também dos agregados;
- *Efeito de encavilhamento da armadura (dowel action-effect)* - a armadura longitudinal resiste a uma parcela do deslocamento causado pela força cortante devido ao efeito de pino na barra. A força de pino na barra da armadura longitudinal depende da rigidez da barra na interseção com a fissura.

Os modelos de mecânica da fratura, nos quais se supõe que uma nova e repentina fissura de cisalhamento se desenvolve cruzando fissuras previamente desenvolvidas, oferecem um método diferente para o estudo de elementos sujeitos ao cisalhamento. Quando lajes sujeitas a cargas concentradas se rompem como faixas, o modo de ruptura é chamado de cisalhamento

unidirecional. Quando essas lajes se rompem localmente com uma superfície de ruptura em forma de tronco de cone, o colapso é denotado como punção ou cisalhamento bidirecional (Figura 2.2). Muito embora a ruptura por cisalhamento seja possível, considerando-se a laje como uma viga de grande largura, ainda é pouco provável que ocorra no caso de lajes lisas; segundo estudos de [Regan \(1985\)](#) e [Gomes \(1991\)](#), a superfície de ruína pode ser alterada caso haja armadura de punção na laje.

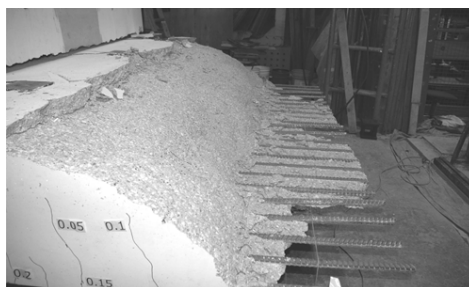


Figura 2.1 – Ruptura de viga chata ([LUBELL et al., 2006](#))

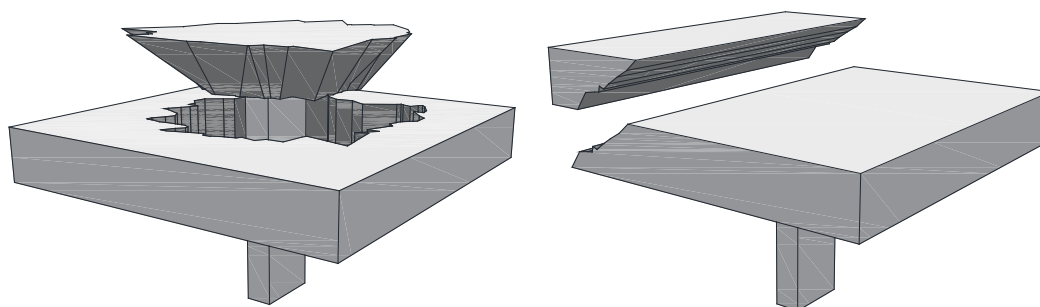


Figura 2.2 – Puncionamento e cisalhamento

[Olonisakin e Alexander \(1999\)](#) mediram o incremento de força em lajes unidirecionais e bidirecionais e descobriram que os valores são muito semelhantes, o que sugere um elo fundamental entre cisalhamento unidirecional e bidirecional.

[Rodrigues, Ruiz e Muttoni \(2008\)](#) argumentam que o cisalhamento unidirecional e o cisalhamento bidirecional são termos confusos, já que o cisalhamento é inerentemente unidirecional como uma quantidade mecânica (ou seja, pode ser representado como um vetor). Como resultado, existe apenas uma direção para o cisalhamento principal, em vez de duas direções, como acontece com os momentos fletores, que são uma quantidade tensorial de um nível mais alto, e têm em cada localização duas direções principais. O cisalhamento é, portanto, realizado exclusivamente na direção do cisalhamento principal, sem transferência de

cisalhamento perpendicular. Nesse sentido, o cisalhamento bidirecional é uma impossibilidade física. Com base no fluxo das forças de cisalhamento, no entanto, é possível explicar o conceito de cisalhamento unidirecional e bidirecional. Zonas nas quais o cisalhamento unidirecional atua são as áreas onde as principais linhas de cisalhamento correm paralelas umas às outras. Zonas nas quais o cisalhamento bidirecional atua são aquelas em que as principais linhas de cisalhamento não estão funcionando em paralelo; por exemplo, em torno de uma carga concentrada.

Assim, uma diferença entre cisalhamento em vigas e lajes foi apontada por [Elstner e Hognestad \(1956\)](#), que revelaram a ligação entre a largura da viga-faixa e o modo de ruptura. Observou-se que o comportamento de amostras de placas de concreto armado não refletia o comportamento e o modo de ruptura de uma laje correspondente, e que as faixas de laje foram consideradas inadequadas para avaliar a resistência à punção, embora tenham sido usadas com sucesso para modelar o comportamento à flexão. Da mesma forma, com base na influência da flexão, [Hawkins e Mitchell \(1979\)](#) diferenciam entre ruptura por cisalhamento de viga-faixa e ruptura de cisalhamento por punção. Para rupturas unidirecionais, a resistência ao cisalhamento é independente da rigidez e, portanto, da resistência à flexão do elemento estrutural linear. Em contraste, para a ruptura por punção, há uma diminuição da resistência ao cisalhamento à medida que a rigidez da conexão laje-pilar também diminui. Armaduras bidirecionais mantêm a rigidez e permitem o desenvolvimento de uma capacidade máxima consideravelmente maior do que a capacidade de cisalhamento de viga-faixa.

2.1. Mecanismos de Resistência à Punção

As rupturas por flexão são acompanhadas por escoamento da armadura e esmagamento do concreto, apresentando grandes deformações em um patamar de resistência residual. Por outro lado, as rupturas por punção geralmente ocorrem subitamente com a formação de uma fissura diagonal que separa um cone de punção do restante da laje. As deformações da placa antes da ruptura total são geralmente pequenas e a resistência residual após a punção é baixa, enquanto as rupturas por flexão são bem compreendidas, e tanto as forças quanto as deformações podem ser previstas com precisão suficiente.

Prever com precisão essas variáveis para rupturas por punção ainda é um desafio, pois o comportamento da região de ruptura por punção é complexo devido às fissuras verticais e diagonais combinadas à natureza tridimensional do problema (PARK e GAMBLE, 1999) e à profundidade da linha neutra (THEODORAKOPOULOS e SWAMY, 2002).

Um momento fletor tangencial ($m_{\theta\theta}$) leva a fissuras nas linhas que irradiam a partir do centro da área carregada e divide a placa em setores, enquanto existe um momento radial (m_{rr}) que é reduzido a uma taxa rápida à medida que se aumenta a distância a partir do pilar, o que provoca o escoamento do aço no perímetro da área carregada e gera fissuras internas inclinadas em forma de tronco de cone, conforme representado na Figura 2.3.

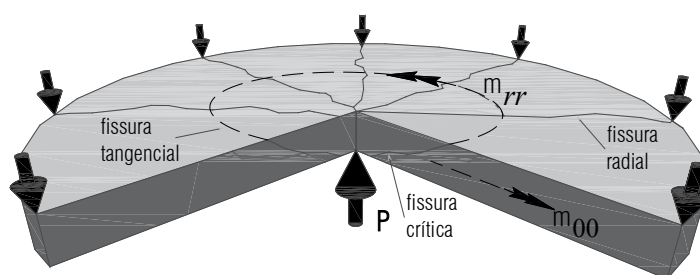


Figura 2.3 – Fissuras radiais e tangenciais em lajes lisas

A maioria dos trabalhos já realizados se baseiam em uma tensão limite de cisalhamento em um dado perímetro crítico, o que é tipicamente relacionado com a inclinação do tronco de cone formado na ruptura e observado experimentalmente. Essa inclinação indica a influência dos diferentes esforços no modo de ruptura, com ângulos de inclinação menores que 45° (CHO e SEO, 2010), que sugerem a presença do cisalhamento, e ângulos de 90°, que apontam para a flexão pura.

Alexander e Simmonds (1987) questionaram a validade de teorias baseadas nas fissuras diagonais porque elas se desenvolvem em 50,0 ~ 70,0 % da carga final da peça, segundo as observações experimentais feitas pelos autores, para quem a laje ainda é muito estável nesse estágio, já que pode ser descarregada e recarregada sem afetar a capacidade final.

Para lajes submetidas a cargas concentradas, podem ser desenvolvidos modelos de bielas e tirantes tridimensionais (Modelo de treliça). Os autores criaram um modelo tridimensional de treliça, com dois tipos de bielas (no plano e fora do plano, conforme ilustra a Figura 2.4). As bielas de ancoragem (no plano) são equilibradas por duas barras de armaduras perpendiculares. Já as bielas de cisalhamento (fora do plano) são semelhantes ao mecanismo de funcionamento de consolos curtos, porém o ponto de aplicação de carga não coincide e, como resultado, o ângulo de inclinação da biela de cisalhamento não é pré-definido, e ela é balanceada através de uma treliça espacial.

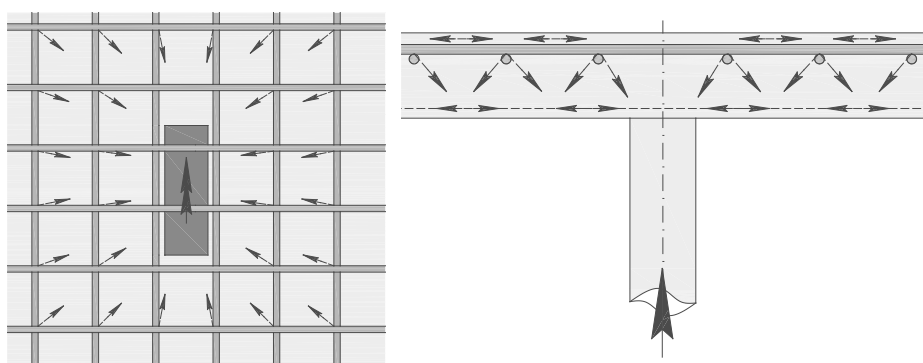


Figura 2.4 – Treliças espaciais usadas no modelo de Alexander e Simmonds (1987) (adaptado)

Desta forma, Alexander e Simmonds (1992) desenvolveram um modelo que combina o efeito de arco e o conceito de tensão de cisalhamento crítica em uma seção. Mostraram que o cisalhamento é realizado através desses arcos a partir da carga em direção a uma posição de cisalhamento zero. Uma desvantagem dessa abordagem, chamada de *Bond Model*, é a exigência de condições simétricas ao eixo, como em um pilar de centro apoiando uma laje lisa.

Outro modelo de cálculo mais recente é a teoria da fissura crítica de cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory* - CSCT) para punção, em que a abertura da fissura crítica de cisalhamento é proporcional à rotação ψ da laje (MUTTONI, 2008), conforme mostra a Figura 2.5. Esse método é usado no *Model Code 2010* (2011) MC2010. Assim, a relação de carga-rotação pode ser calculada integrando-se a relação momento-curvatura da laje.

O método pode ser simplificado assumindo-se que as rotações ψ são constantes ao longo dos segmentos retos do perímetro de controle. Ao estimar as rotações juntamente com a capacidade de cisalhamento, o projetista ganha uma melhor visão da ductilidade da estrutura (MUTTONI e RUIZ, 2009), conforme ilustra a Figura 2.6. No entanto, a necessidade de uma descrição precisa das rotações também pode ser vista como uma desvantagem do método, pois para casos práticos, os cálculos não lineares pelo Método dos Elementos Finitos (FEM) são dispendiosos.

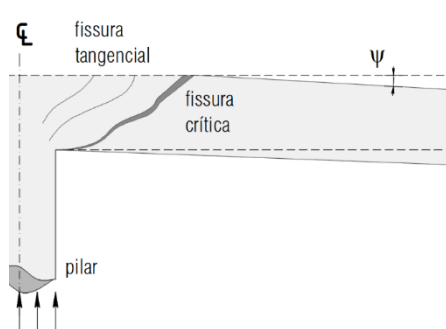


Figura 2.5 – Fissura crítica e rotação da laje

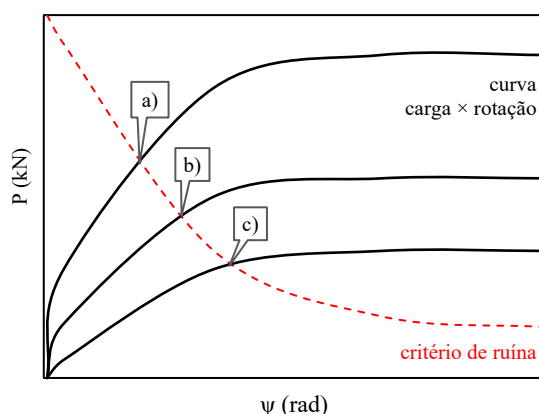


Figura 2.6 – Curva carga \times rotação da laje com armaduras longitudinais: a) no regime elástico; b) início do escoamento; c) escoamento total.

Um modelo baseado em plasticidade para punção foi desenvolvido por Kinnunen e Nylander (1960). Este modelo assume que a porção da laje fora da fissura de cisalhamento pode ser considerada como um corpo rígido, que é girado sob ação de carga em torno da origem da fissura de cisalhamento. Três modos de ruptura são considerados: por cisalhamento, por formação do tronco de cone, e ruptura por compressão do concreto em uma direção tangencial. Posteriormente, o modelo foi ampliado por Hallgren (1994) para incorporar um critério de ruptura baseado na mecânica de fratura não linear.

Existem, ainda, as expressões empíricas para verificação do puncionamento, que são o resultado de experimentos em ligações laje-pilar em escala reduzida ou escala real sujeitas à tensão crítica de cisalhamento. De todas as abordagens empíricas disponíveis na literatura, a de [Oliveira \(2015\)](#) é de maior interesse para esta pesquisa, pois foi desenvolvida para lajes unidirecionais e bidirecionais sob altas cargas concentradas. Baseia-se na definição de um perímetro crítico em torno da carga concentrada, levando em consideração, dentre vários fatores, um fator de flexão que traduz as condições de contorno da laje e a orientação e dimensão do pilar.

Outra abordagem é o uso da teoria de placas e Métodos de Elementos Finitos (FEM), variando de modelos simples de placas elásticas a sofisticados modelos não lineares que levam em conta o comportamento plástico nas fissuras. A armadura deve ser modelada como barras discretas com comportamento plástico, tendo propriedades de ligação da interface entre o concreto e a armadura que precisam ser adequadamente modeladas, tendo em vista o comportamento *softening* para melhor representação do modelo. As soluções a partir do FEM podem consumir muito tempo e exigem uma compreensão muito boa do comportamento do material e do software. O usuário precisa estar ciente das limitações dos modelos de materiais, tipos de elementos e técnicas de cálculo usadas. Para casos complexos, modelos de FEM que conseguem exibir o comportamento realisticamente desde o primeiro carregamento até a falha ainda são objeto de pesquisa, como será o caso utilizado nesta pesquisa através do software Abaqus/CAE 6.14.

2.2. Métodos de previsão

Há décadas os pesquisadores vêm tentando propor de modo unânime um método teórico unânime para estimativa de resistência de ligações laje-pilar. Um dos métodos mais importantes da literatura é o proposto por Kinnunen e Nylander (1960) este é um método que prevê a carga e deformações na ruptura por punção ou flexão. Mais recentemente Muttoni (2008) sugeriu uma teoria para lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento e sob puncionamento simétrico, posteriormente revisto e ampliado por Ruiz e Muttoni (2009) para tratar os casos com armaduras de cisalhamento.

2.2.1. KINNUNEN E NYLANDER (1960)

No modelo proposto pelos autores as lajes são subdivididas em segmentos e estes segmentos tratados como corpos rígidos supostamente apoiados em uma placa cônica confinada entre o pilar e a fissura crítica de cisalhamento. As forças internas provocadas por este sistema são função matemática da rotação (ψ) e das propriedades mecânicas do aço e do concreto, e assim, o critério de ruptura ocorre quando um ponto inferior da laje atinge uma deformação radial crítica ao mesmo tempo em que atingem as deformações tangenciais também críticas no concreto.

Desta forma a rotação pode ser calculada por:

$$\psi = \varepsilon_{cto} \cdot \left[1 + \frac{c}{2 \cdot x} \right] \quad \text{Equação 2.1}$$

Em que:

ε_{cto} – deformação radial crítica;

c – diâmetro do pilar;

x – distância vertical inferior medida entre a face da laje e a base da fissura crítica.

A tensão de escoamento das armaduras de flexão é atingida pelas barras localizadas dentro do raio:

$$r_{ys} = \psi \cdot (d - x) \cdot \frac{E_s}{f_{ys}} \quad \text{Equação 2.2}$$

Em que:

E_s – módulo de elasticidade do aço;

f_{ys} – tensão característica de escoamento das armaduras.

E por fim com este raio gera um perímetro crítico proposto com o qual é possível calcular a capacidade resistente da laje fazendo-se seu produto com altura útil e tensão resistente do concreto. Este foi um modelo originalmente descrito para casos de armaduras axissimétricas,

então os autores propuseram alterações para tratar do caso de armaduras ortogonais aumentando em aproximadamente 10% a capacidade inicial axissimétrica.

2.2.2. MUTTONI E SCHWARTZ (1991)

O raciocínio dos autores diz que resistência a punção das lajes é inversamente proporcional à sua rotação. Explicada pela fissura crítica tronco cônica que se propaga pela laje cortando a biela comprimida responsável pela transmissão da força cortante ao apoio, neste caso o pilar. A espessura desta fissura é proporcional ao produto $\psi \cdot d$.

E baseado nesta premissa Muttoni (2008) apresenta que a resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento pode ser calculada por:

$$V_{Rc} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad \text{Equação 2.3}$$

Em que:

u – perímetro de controle à $d/2$ da face do pilar;

d – altura útil da laje;

f_c – resistência à compressão do concreto;

ψ – rotação da laje;

d_{g0} – diâmetro de referência do agregado graúdo de 16 mm;

d_g – diâmetro máximo do agregado graúdo do concreto.

Com a rotação calculada como:

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left[\frac{V_E}{V_{flex}} \right]^{3/2} \quad \text{Equação 2.4}$$

Em que:

r_s – é a distância entre o eixo do pilar a linha de momentos fletores nulos;

V_E – força aplicada;

V_{flex} – força resistente à flexão da placa calculada pela teoria de linhas de ruptura.

3. TRABALHOS REALIZADOS

Neste capítulo, são descritos os trabalhos mais relevantes encontrados na literatura que estudaram lajes lisas unidirecionais de concreto armado sob punção simétrica com diferentes taxas de armadura de flexão principal e/ou secundária, sem armadura de cisalhamento. Todos fazem parte do banco de dados que será apresentado nos próximos capítulos.

3.1. Takahashi e Kakuta (1983)

Os autores estudaram lajes retangulares de concreto armado com duas bordas simplesmente apoiadas e demais bordas livres, com o objetivo de verificar o efeito que exercem na resistência à punção das lajes. Takahashi e Kakuta citam que normas como [ACI](#) e [CEB](#), à época, apresentavam recomendações para se estimar a resistência das lajes nestas situações, pressupondo que o comprimento da seção crítica, neste caso, deveria sofrer reduções.

As lajes testadas apresentavam vão de 1,0 m e largura entre 500 a 1.400 mm. A armadura de flexão era composta por barras de 10,0 mm de diâmetro, com $f_{ys} = 350$ MPa, espaçadas a cada 50 mm e distribuídas nas direções longitudinal e transversal, sendo a armadura principal ancorada por ganchos com uma altura útil das lajes de 75 mm. O carregamento foi aplicado na metade do vão principal, variando-se a distância da carga concentrada à borda livre. Foram utilizadas as dimensões de (100 x 100) mm, (70 x 140) mm e (140 x 70) mm para os pilares. Ambos tendo o concreto de resistência $f_c = 30$ MPa. A Figura 3.1 mostra um detalhe das lajes ensaiadas.

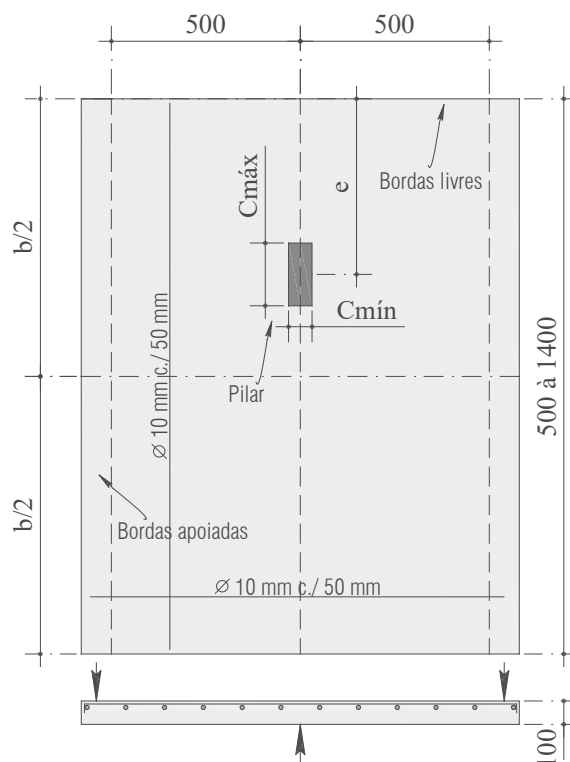


Figura 3.1 – Esquema de ensaio de [Takahashi e Kakuta \(1983\)](#) (mm)

Nas lajes com os menores valores de b (500 e 700) mm, foi aplicado um carregamento concentrado no centro da laje, e a ruptura se deu por flexão. Nas lajes com os maiores valores de b (1.000 e 1.400) mm, independentemente da posição do carregamento, a ruptura ocorreu por punção. Quando o carregamento foi aplicado fora do centro da direção perpendicular à borda livre, a aparência da superfície de ruptura era como se parte do cone tivesse sido cortado pela existência da referida borda.

De forma geral, os autores observaram que as recomendações da norma americana [ACI 318 \(1977\)](#) e europeia [CEB-FIP \(1978\)](#) se mostraram conservadoras, com uma margem elevada a favor da segurança, subestimando, em todos os casos, a resistência das lajes. No entanto quanto mais próximo o carregamento foi aplicado próximo da borda livre, menor a margem de segurança.

Os autores observaram que, nas lajes unidirecionais com carregamento centrado, existe uma relação entre a largura b da laje e o modo de ruptura. Para valores de b inferiores a 700 mm, as lajes romperam por flexão, com a linha de ruptura se estendendo por toda a largura da laje. A Figura 3.2 mostra um gráfico onde foram plotados os valores de b das lajes ensaiadas pelos

pesquisadores e a resistência última, para carregamento centrado e para $e = 100$ mm, podendo-se observar a mudança no modo de ruptura no caso centrado, de acordo com o aumento do valor de b .

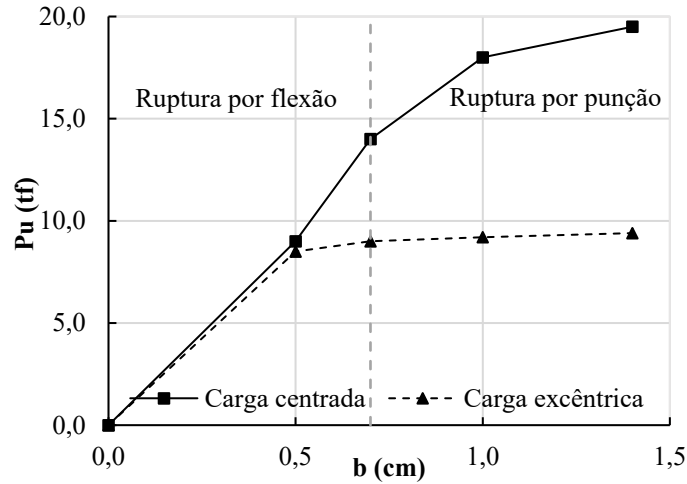


Figura 3.2 – Comportamento das lajes de Takahashi e Kakuta (1983)

3.2. Regan e Rezai-Jorabi (1988)

Nesta pesquisa, foram ensaiadas 26 lajes lisas unidirecionais de concreto armado, com vão 1350 mm e 900 mm, com espessura total de 100 mm e 1.600 mm de comprimento, simplesmente apoiadas, submetidas a ensaios de uma e duas cargas iguais aplicadas simetricamente ao eixo da laje. A armadura de flexão transversal (secundária) foi composta por barras de 6,0 mm de diâmetro dispostas a cada 60 mm e a armadura de flexão longitudinal (principal), por barras de 10,0 mm de diâmetro também espaçadas a cada 60 mm, com cobrimento de 12 mm para as lajes 1 a 20, e 15 mm de 21 a 26. As principais variáveis envolvidas foram a largura das lajes, as dimensões das áreas carregadas e o comprimento do vão de cisalhamento.

A partir do número total de lajes, seis delas foram testadas novamente após a ruptura por cisalhamento em uma das direções de forma a reduzir o vão. Essas lajes foram então submetidas a um único carregamento centrado, conforme mostra a Figura 3.3. A resistência à compressão do concreto variou de 28 a 39 MPa e as armaduras utilizadas apresentaram tensão de escoamento: 670 MPa para as barras de 10,0 mm; e 743 MPa para as de 6,0 mm.

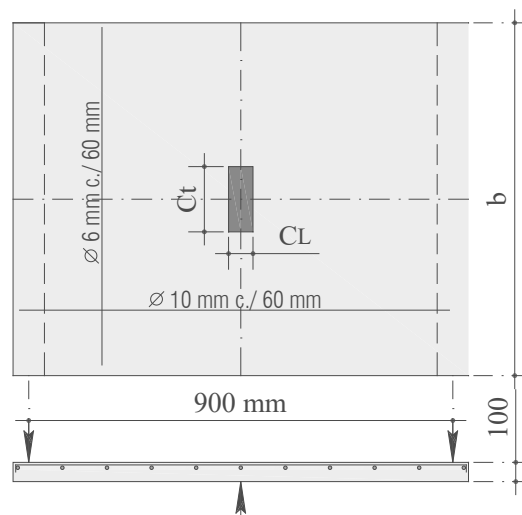


Figura 3.3 – Ensaio de Regan e Rezai-Jorabi (1988) (mm)

Todas as lajes ensaiadas romperam por cisalhamento, tendo a maioria rompido como viga chata com linha de ruptura ao longo de toda a largura da laje. Os pesquisadores observaram que as deformações na armadura transversal foram praticamente uniformes, enquanto que a das armaduras longitudinais variou em função do tamanho C_t ($C_{máx}$) das áreas carregadas. Foi observado ainda que a resistência última das lajes aumentou em função de sua largura b , mas no caso de carregamento concentrado, a tendência desse aumento foi de se estabilizar a partir de $b = 1.200$ mm. A Tabela 3.1 apresenta as principais características, cargas e modos de ruptura das seis lajes ensaiadas com uma carga concentrada, assim como o foco desta tese.

Tabela 3.1 – Lajes ensaiadas (REGAN e REZAI-JORABI, 1988)

Laje	f_c (MPa)	ρ (%)	a (mm)	b (mm)	C_t (mm)	C_L (mm)	P_U (kN)	Modo
14R	31,0	1,54	450	800	75	100	77,0	Punção
15R	30,8	1,54		800	150		86,0	Punção
16R	31,2	1,54		800	600		116,5	Viga Chata
17R	31,0	1,51		1.000	600		137,5	Viga Chata
19R	29,0	1,51		1.000	150		85,0	Punção
20R	30,8	1,51		1.000	300		132,5	Punção

Ao comparar as lajes similares que foram ensaiadas com dois carregamentos simétricos e aquelas com um carregamento centrado, os autores perceberam a existência de uma tendência de maiores resistências (ruptura como viga chata) nos casos em que as cargas estão separadas.

3.3. Oliveira (2003)

Neste trabalho, foram ensaiadas 15 lajes lisas de concreto armado com dimensões e armadura de flexão constantes; cinco dessas lajes foram ensaiadas de forma bidirecional e 10, de forma unidirecional; cinco dessas últimas lajes tiveram vão principal perpendicular à maior dimensão do pilar (*L1b*, *L2b*, *L3b*, *L4b* e *L5b*). O objetivo desse procedimento foi analisar o comportamento das lajes em relação à posição das faces dos pilares. A relação entre o maior e menor vão variou de 0,96 a 1,27, de 1,22 a 1,57 e de 1,09 a 1,43 nas lajes com carregamento P1 (lajes "a"), P2 (lajes "b") e com P1 e P2 (lajes "c"), respectivamente, conforme apresentado na Figura 3.4.

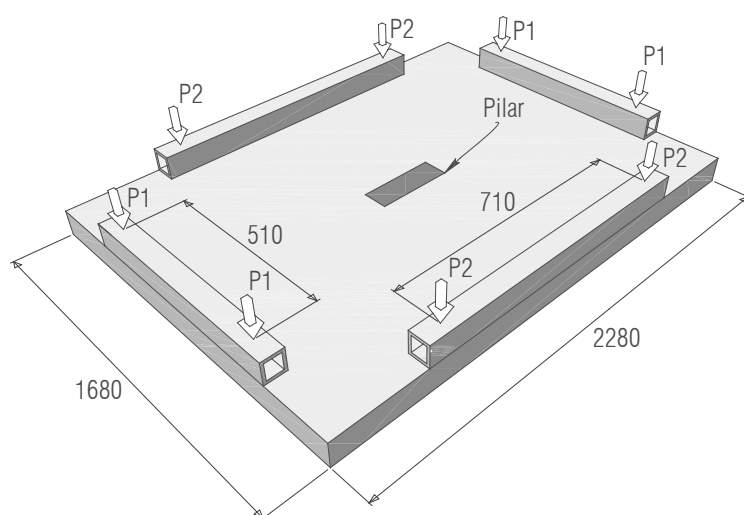


Figura 3.4 – Sistema de ensaio de Oliveira (2003) (mm)

A taxa de armadura de flexão foi de aproximadamente 1,1 % em cada direção. As lajes possuíram lados com 1680 mm (l_x) e 2280 mm (l_y) de comprimento e foram submetidas a um carregamento distribuído ao longo das bordas através de vigas metálicas. Cada armadura de flexão foi constituída por 23 \varnothing 12,5 c/ 117 mm ao longo de l_y e 15 \varnothing 12,5 c/ 102 mm ao longo de l_x . As características das lajes ensaiadas são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Características das lajes de Oliveira (2003)

Laje	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_{ys} (MPa)	c_{\min}	C_{\max}	Tipo	P_U (kN)
L1a	107		57			120	P1	234
L1b	108		59			120	P2	322
L1c	107		59			120	P1 e P2	318
L2a	109		58			240	P1	246
L2b	106		58			240	P2	361
L2c	107		57			240	P1 e P2	331
L3a	108		56			360	P1	241
L3b	107	1,1	60	750	120	360	P2	400
L3c	106		54			360	P1 e P2	358
L4a	108		56			480	P1	251
L4b	106		54			480	P2	395
L4c	107		56			480	P1 e P2	404
L5a	108		57			600	P1	287
L5b	108		67			600	P2	426
L5c	109		63			600	P1 e P2	446

Oliveira (2003) concluiu que as lajes solicitadas em duas direções (lajes “c”) e predominantemente em uma direção com pilares nos quais os maiores lados estavam paralelos aos vãos das lajes (lajes “a”), apresentaram deformações além daquela estabelecida para o escoamento das barras nos ensaios de tração do aço. Essas deformações foram mais elevadas que as observadas nas lajes solicitadas em uma direção, apoiadas em pilares com os menores lados paralelos aos vãos das lajes (lajes “b”).

As lajes “a” apresentaram um modo de ruptura misto de punção dentro de um regime característico de uma ruptura por flexão. Para as lajes com índice de retangularidade maior ou igual a 3, não ocorreu a propagação da superfície de ruptura ao longo dos maiores lados dos pilares. O modo de ruptura por puncionamento ocorreu nas lajes “b” e “c”, com a superfície de ruptura contornando os pilares, com exceção das lajes *L3b* e *L4b*, onde estas superfícies localizaram-se em torno das extremidades dos pilares, indicando a ocorrência do fenômeno da polarização das forças cortantes.

O autor apresentou uma proposta para tratamento de pilares retangulares considerando o comportamento das lajes à flexão e a orientação dos pilares. As lajes foram classificadas em três grupos distintos, conforme mostra a Tabela 3.3, e para cada grupo foi proposto um fator de flexão para correção das estimativas fornecidas pelo *MC90* da época, de acordo com a Equação 3.1. Os resultados obtidos foram significativamente melhores que os apresentados pelas normas

analisadas pelo autor e eliminou a tendência da norma *MC90* de superestimar a resistência das lajes-cogumelo apresentadas.

Tabela 3.3 – Fatores e flexão de Oliveira (2003)

Caso	λ
(1) Laje unidirecional com vão paralelo à $C_{\text{máx}}$	$(c_{\text{máx}}/d)^{0,17}$
(2) Laje unidirecional com vão perpendicular à $C_{\text{máx}}$	$0,93 \cdot (c_{\text{máx}}/d)^{0,14}$
(3) Laje bidirecional	$1,03 \cdot (c_{\text{máx}}/d)^{0,02}$

$$V_{Rk} = \frac{0,18}{\lambda} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u \cdot d \quad \text{Equação 3.1}$$

3.4. Ferreira (2006)

Neste caso, foram ensaiadas 12 lajes de concreto armado com dimensões de (1800 × 1800 × 110) mm, tendo como variáveis a distância de aplicação da carga ao apoio (a) e a taxa de armadura transversal ou secundária (ρ_t) para cada posição do carregamento. A série de 12 ensaios foi adotada para analisar as combinações de $a = 320, 400, 533$ e 800 mm (correspondendo a uma razão entre os cortantes de 4:1, 3:1, 2:1 e 1:1) e armaduras transversais de 12,5/10 e 8,0 mm. Assim, as lajes da série $a = 800$ mm (*L1a, L1b* e *L1c*) se encaixam perfeitamente no escopo desta pesquisa.

As armaduras de flexão das lajes foram compostas por barras de 12,5 mm ($f_{ys} = 488$ MPa) a cada 99 mm na direção longitudinal (principal), e por barras de 8,0 ($f_{ys} = 639$ MPa) ou 10,0 ($f_{ys} = 496$ MPa) ou 12,5 mm ($f_{ys} = 488$ MPa) a cada 99 mm na direção transversal (secundária).

A Figura 3.5 apresenta o sistema de ensaio, armaduras e os pilares posicionados na parte inferior da laje; uma placa quadrada de aço com as dimensões de 85 × 85 × 50 mm foi utilizada para aplicação da carga. A taxa de armadura variou entre 0,94 % e 1,48 %. Na Tabela 3.4, estão presentes as características das lajes ensaiadas.

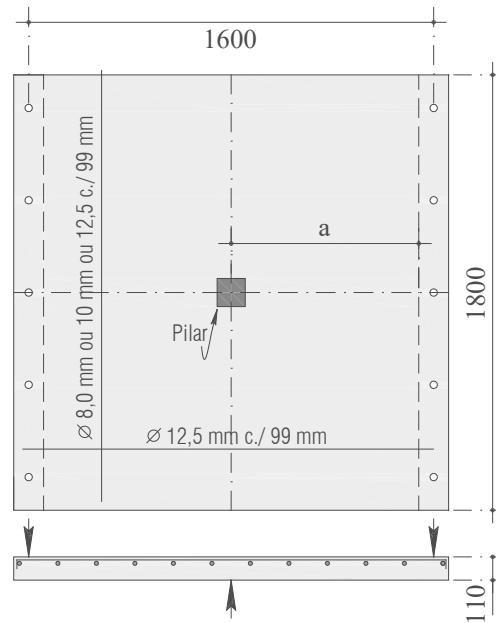


Figura 3.5 – Detalhe das lajes L1a, L1b e L1c (FERREIRA, 2006) (mm)

Tabela 3.4 – Características das lajes de Ferreira (2006)

Laje	d (mm)	f_c (MPa)	\varnothing_L (mm)	\varnothing_T (mm)	ρ (%)	a (mm)	P_U (kN)	Modo de Ruptura
L1a	87	42,4	12,5	8,0	0,94	800	174,0	Punção
L1b	89	51,4		10,0	1,18	800	231,5	Flexo-punção
L1c	87	43,5		12,5	1,48	800	190,0	Punção
L2a	88	42,1		8,0	0,94	533	228,0	Punção
L2b	88	49,7		10,0	1,18	533	211,0	Punção
L2c	87	44,8		12,5	1,48	533	159,5	Punção
L3a	88	42,1		8,0	0,94	400	225,0	Punção
L3b	88	49,3		10,0	1,18	400	215,0	Punção
L3c	87	36,1		12,5	1,48	400	179,5	Punção
L4a	89	48,8		8,0	0,94	320	193,5	Punção
L4b	89	58,0		10,0	1,18	320	191,0	Punção
L4c	87	44,8		12,5	1,48	320	205,5	Punção

O autor destaca que a taxa de armadura transversal influenciou significativamente a distribuição dos esforços na laje, o que afetou a ductilidade, os deslocamentos verticais, a fissuração, a resistência ao puncionamento e a superfície de ruptura das peças. Porém, não afirma com exatidão que as lajes com menores taxas de armadura transversal desenvolveram maiores resistências, pois a variação na intensidade dos momentos fletores e dos esforços cortantes, advinda da variação na posição do carregamento, exerceu forte influência na resistência ao puncionamento observada para as lajes.

Os mapas de fissuração mostraram que, para as lajes com taxa de armadura transversal “*a*”, as fissuras se desenvolveram radialmente, estendendo-se em direção às bordas apoiadas. Já para as lajes com taxa “*c*”, observou-se que as fissuras se desenvolveram transversalmente, em direção às bordas livres. As lajes com taxa “*b*” apresentaram um comportamento intermediário entre o observado para as lajes com taxas “*a*” e “*c*”.

Com exceção da laje *L1b*, na qual o modo de ruptura observado foi o flexo-puncionamento, nas demais lajes a ruptura ocorreu por puncionamento. Destaca-se que a excentricidade do carregamento aumentou a resistência à flexão das lajes, devido à diminuição dos efeitos da flexão, o que gerou uma tendência de aumento, também, da resistência última ao puncionamento.

Por fim, o autor faz sugestões pertinentes para a continuidade da pesquisa no tema, dizendo que poderiam ser utilizados pilares quadrados e pilares bastante retangulares com índice de retangularidade 5. Além disso, a taxa de armadura longitudinal secundária poderia variar inicialmente a 50% abaixo, e posteriormente a 50% acima da taxa de armadura longitudinal principal. Deste modo, seria possível verificar a influência do índice de retangularidade dos pilares e a contribuição da taxa de armadura secundária em lajes unidirecionais.

3.5. Carvalho (2006)

[Carvalho \(2006\)](#) analisou experimentalmente 10 lajes lisas de concreto de alta resistência ($f_c = 60$ MPa) e dosado com metacaulim, as quais foram submetidas a carregamento simétrico, com o objetivo de analisar a influência da variação do índice de retangularidade dos pilares e de armaduras de cisalhamento na resistência ao puncionamento das mesmas. Dentre as 10 lajes, 3 (*L1*, *L2* e *L3*) foram ensaiadas sem armadura de cisalhamento e com pilares de índice de retangularidade 1, 3 e 5, que se encaixam perfeitamente no escopo deste projeto de tese. As lajes de dimensões $1.800 \times 1.800 \times 110$ mm foram ensaiadas de acordo com a condição de lajes unidirecionais. A taxa da armadura de flexão foi de 1,32 %, composta de 32 barras de 12,5 mm ($f_{ys} = 530$ MPa e $f_u = 676$ MPa) em duas direções, ou seja, 16 barras em cada direção espaçadas a cada 118 mm com cobrimento de aproximadamente 13 mm, conforme apresentado na Figura 3.6.

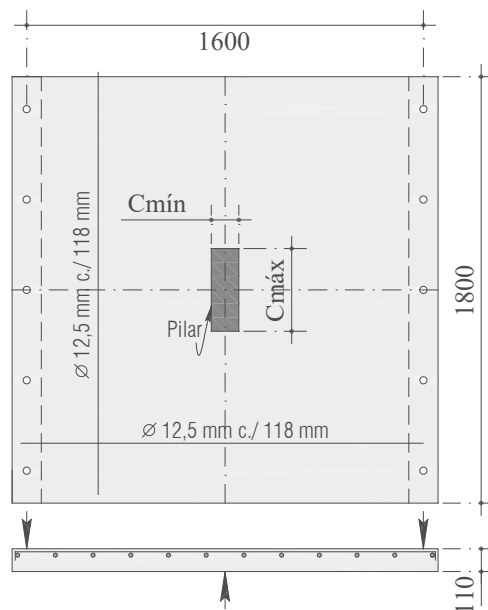


Figura 3.6 – Ensaio de Carvalho (2006)

Após os ensaios, a laje L1 foi a que apresentou maior inclinação das linhas de ruptura (39°) entre as lajes sem armadura de cisalhamento, para as quais a inclinação da linha de ruptura variou de 17° a 39° .

Todas as lajes sem armadura de cisalhamento romperam por punção e cargas próximas às estimadas por flexão. Através do monitoramento das deformações, percebeu-se que quanto maior o índice de retangularidade, mantendo-se a menor dimensão constante, houve um maior número de barras da armadura principal que escoaram, indicando tendência de ruptura por flexão. Embora o autor tenha observado uma ruptura por punção na laje L3, pontua-se que seu modo de ruptura poderia ser caracterizado como flexo-puncionamento, já que das quatro barras da armadura principal que foram monitoradas, três ultrapassaram o limite de escoamento. Também houve um aumento da carga última das lajes, de acordo com o aumento do índice de retangularidade dos pilares, o que pode ser consequência do aumento do perímetro crítico natural das peças, conforme apresenta a Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Lajes sem armadura de cisalhamento ensaiadas por [Carvalho \(2006\)](#)

Laje	C_{\min} (mm)	C_{\max} (mm)	f_c (MPa)	d (mm)	P_U (kN)	Modo de ruptura
L1	85	85	52	85	185	Punção
L2	85	255	52	86	226	Punção
L3	85	425	50	85	239	Punção

3.6. Vilhena *et al.* (2006)

[Vilhena *et al.* \(2006\)](#) estudaram 6 lajes lisas unidirecionais de concreto armado de alta resistência ao puncionamento simétrico. As lajes tinham dimensões de $1.400 \times 1.000 \times 80$ mm e a resistência à compressão do concreto ficou em torno de 53 MPa. As principais variáveis foram a taxa de armadura de flexão secundária (1,2% e 1,9%) e o índice de retangularidade dos pilares. A taxa de armadura principal foi mantida constante e igual a 1,2%. Todas as barras utilizadas foram de 10,0 mm com tensão de escoamento $f_{ys} = 773$ MPa.

A armadura principal foi constituída por 10 \varnothing 10,0 mm c./ 109 mm, e a armadura secundária por 13 \varnothing 10,0 mm c./ 115 mm (Lajes tipo A) e 20 \varnothing 10,0 mm c./ 73 mm (Lajes tipo B), conforme Figura 3.7, que também apresenta o sistema de ensaio utilizado.

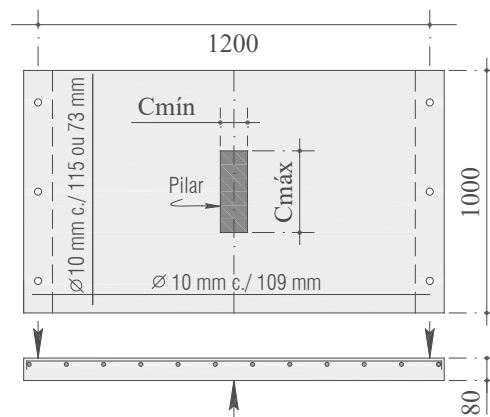


Figura 3.7 – Sistema de ensaio e armaduras das lajes ([VILHENA *et al.*, 2006](#))

Os autores observaram que as resistências das lajes não foram significativamente alteradas com o incremento da taxa de armadura para um mesmo índice de retangularidade. Verificou-se que a baixa resistência à flexão de todas as lajes reduziu a capacidade resistente ao puncionamento. Foram encontradas diferenças de até 50% para as lajes com pilares de índice de retangularidade 5. Vilhena e colaboradores afirmaram, ainda, que este elevado índice tende a dissipar as tensões de cisalhamento, fazendo com que um comportamento de viga seja predominante, porém

avaliam que o mesmo não se aplica às lajes com pilares de menores índices, como as lajes *L1a* e *L1b*, nas quais foram observadas diferenças de até 23% entre as estimativas normativas e os resultados experimentais.

As lajes com pilares de índice de retangularidade 3 romperam por punção dentro de um regime de ruptura previsto para flexão, e as fissuras que caracterizam as linhas de ruptura mostraram abertura excessiva. A Figura 3.8 ilustra os modos característicos de ruptura observados nos ensaios.

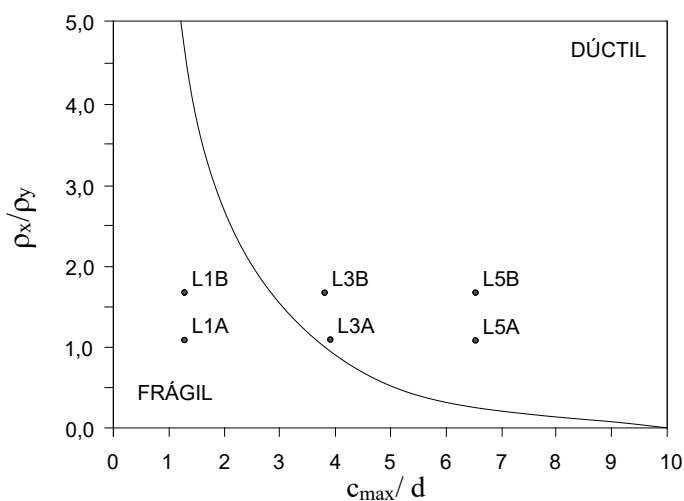


Figura 3.8 – Modos de ruptura das lajes de Vilhena *et al.* (2006)

Os resultados mostraram que as estimativas normativas da época são semelhantes e tendem a superestimar a resistência média ao puncionamento das lajes em até 52%, quando a resistência à flexão é significativamente reduzida. O emprego da taxa geométrica média (das duas direções) superestima a resistência ao puncionamento, uma vez que a baixa capacidade resistente à flexão antecipou a ruptura por punção em até 25%. Este efeito é claro em lajes com pilares de baixos índices de retangularidade, no qual o modo de ruptura foi puncionamento frágil, de acordo com a Tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Cargas e modos de ruptura de Vilhena *et al.* (2006)

Laje	d (mm)	f_c (MPa)	ρ_y (%)	ρ_x (%)	$C_{m\acute{a}x}$ (mm)	$C_{m\acute{i}n}$ (mm)	P_U (kN)	Modo de ruptura
L1a	65	51,2	1,2	1,2	85	85	123	Punção
L1b	65	51,2		1,9	85		122	Punção
L3a	65	53,6		1,2	255		134,5	Flexo-punção
L3b	67	53,6		1,9	255		134	Flexo-punção
L5a	65	55,2		1,2	425		122	Punção
L5b	65	55,2		1,9	425		124,5	Punção

3.7. Damasceno (2007)

Foram ensaiadas experimentalmente 8 lajes unidirecionais de concreto armado sem armadura de cisalhamento com dimensões padronizadas de $1800 \times 1800 \times 110$ mm, tendo como variáveis: o índice de retangularidade dos pilares e 2 diferentes valores de taxas de armadura de flexão secundária (direção x). As lajes foram divididas em 2 grupos, sendo o primeiro (L1A, L2A, L3A e L4A) com taxa de armadura de flexão secundária alta (em torno de 1,25%) com 16 \varnothing 12,5 mm c./ 119 mm ($f_{ys} = 600$ MPa e $f_u = 740$ MPa), e o segundo (L1B, L2B, L3B e L4B) com taxa de armadura de flexão secundária baixa (em torno de 0,30%) com 16 \varnothing 6,3 mm c./ 119 mm ($f_{ys} = 505$ MPa e $f_u = 661$ MPa). Todas as lajes foram armadas na direção principal (direção y) com \varnothing 12,5 mm a cada 119 mm. A Figura 3.9 apresenta detalhes da laje e do sistema de ensaio aplicado.

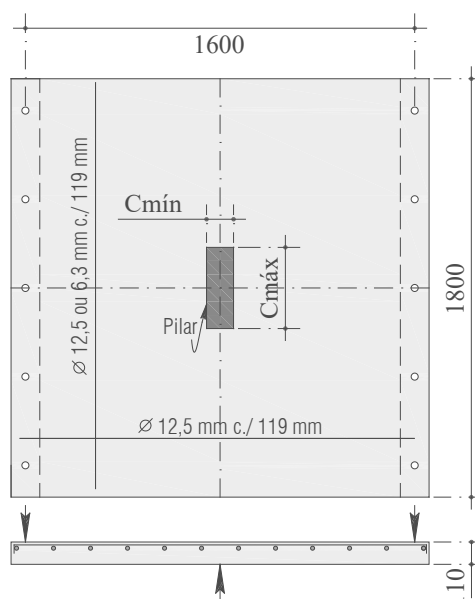


Figura 3.9 – Lajes de Damasceno (2007)

Após análise da influência do índice de retangularidade dos pilares e a contribuição da taxa de armadura de flexão secundária nas cargas últimas das lajes e nos modos de ruptura, observou-se que os resultados experimentais indicaram que essas variáveis, além de elevar a resistência da ligação, podem fornecer certa ductilidade à ruptura da laje. Para lajes com pilares de mesmo índice de retangularidade, as deformações foram mais acentuadas naquelas com maior taxa de armadura de flexão secundária, o que foi mais perceptível para os índices 5 e 7.

As lajes *L2A*, *L3A* e *L4A* apresentaram cargas 38%, 23% e 25%, maiores que as cargas necessárias para promover o início de escoamento da armadura principal das lajes *L2B*, *L3B*, e *L4B*, respectivamente. No caso das lajes *L1A* e *L1B*, somente a última apresentou escoamento da armadura, com carga equivalente a 93% da carga de ruptura observada no ensaio. Portanto, o comportamento da armadura de flexão principal das lajes foi bastante influenciado pela variação da armadura de flexão secundária que, no caso de uma baixa taxa, apresentou menor resistência ao puncionamento, assim, deixando de mobilizar parte da resistência à flexão na direção principal. Isto confirma que a taxa menor de armadura de flexão secundária limitou a capacidade de algumas lajes resistirem aos esforços, conforme apresentado na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Características das lajes de Damasceno (2007)

Laje	d (mm)	\varnothing_L (mm)	\varnothing_S (mm)	ρ_y (%)	ρ_x (%)	f_c (MPa)	$C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{i}n}$	P_U (kN)	Modo
L1A	89,3	12,5	12,5	1,22	1,22	41,3	1	188,5	Punção
L2A	89,3		12,5	1,22	1,22	40,0	3	254,0	Flexo-Punção
L3A	99,7		12,5	1,09	1,09	39,7	5	297,0	Flexão
L4A	98,6		12,5	1,11	1,11	40,4	7	325,0	Flexão
L1B	98,1		6,3	1,11	0,28	41,4	1	172,0	Punção
L2B	90,5		6,3	1,21	0,31	42,0	3	194,5	Punção
L3B	92,7		6,3	1,18	0,30	41,6	5	232,0	Flexo-Punção
L4B	98,1		6,3	1,11	0,28	40,5	7	254,5	Flexo-Punção

No caso das lajes com pilares de maiores índices de retangularidade (5 e 7), observou-se a tendência de redução dos efeitos do puncionamento devido ao aumento do perímetro de controle. Apesar da maior rigidez conferida às lajes com maior taxa de armadura de flexão secundária, a variação desta não possibilitou diferenças acentuadas no padrão de fissuração a ponto de estabelecer uma relação entre essa taxa e o surgimento das fissuras. Assim, o autor conclui que embora as lajes *L3A* e *L4A* tenham rompido por flexão, houve um elevado estado de fissuração que diminuiu consideravelmente a rigidez da peça, resultando na formação do tronco de cone de punção após a ruptura. Por sua vez, as lajes *L2A*, *L3B* e *L4B* apresentaram

rupturas caracterizadas pela combinação de punção e flexão simultaneamente. Damasceno (2007) ainda sugere estudar o comportamento de lajes lisas unidirecionais quadradas ao puncionamento simétrico, variando as taxas de armadura de flexão nas duas direções e utilizando pilares quadrados com diversas dimensões.

4. RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

A relativa economia de lajes lisas depende diretamente de sua espessura, que é governada por ambos os limites de deslocamentos verticais e de resistência à punção. Lajes menos espessas não só economizam nos custos dos materiais da estrutura e fundações, como também reduzem os custos de revestimento de parede dado pela diminuição de pé-direito.

Para este fim, não há método único para análise do puncionamento; métodos de cálculo recentes são calibrados usando dados de testes de espécimes de lajes retangulares. Senso assim, neste capítulo, são apresentadas as propostas de cálculo de quatro normas vigentes, que levam em consideração a resistência ao puncionamento de lajes com e sem armadura de cisalhamento de um total V_R , mas não maior que $V_{R,máx}$, onde:

- $V_R = \alpha V_{R,c} + V_{R,s} \geq V_{R,c}$ = é a resistência à punção total da laje, constituída da parcela ponderada do concreto $\alpha V_{R,c}$, onde $\alpha \leq 1$; e da parcela da armadura de cisalhamento $V_{R,s}$;
- $V_{R,c} = v_c \cdot u \cdot d$ = é a resistência de uma laje similar sem armadura de cisalhamento em que “ v_c ” é a tensão de cisalhamento de projeto, “ u ” é o perímetro de controle básico e “ d ” é a altura útil média da laje;
- $V_{R,max}$ é a resistência ao cisalhamento máxima possível para os dados tamanho de pilar, altura útil e resistência do concreto.

Assim, são estudadas as principais normas reconhecidas e utilizadas mundialmente como referência para desenvolvimento de projeto e execução de obras civis, por exemplo, a norma brasileira [NBR 6118 \(2014\)](#), cujas prescrições relativas ao puncionamento de lajes são inspiradas na norma [EUROCODE 2 \(2004\)](#), sendo então similares para lajes unidirecionais ao puncionamento. Portanto, as normas apresentadas serão:

- [ACI 318 – 2019 \(ACI 318\)](#), American Building Code Requirements for Reinforced Concrete. American Concrete Institute. ([ACI, 2011](#));
- [EUROCODE 2 - 2004 \(EC 2\)](#), Design of Concrete Structures. European Committee for Standardization. ([EC 2, 2004](#));
- [NBR 6118 \(2014\)](#), Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento ([ABNT, 2014](#));
- [MODEL CODE 2010 \(MC 2010\)](#), CEB-FIP: 2011. Comitee Euro-International du Beton. ([MC, 2011](#)).

A seguir, serão descritas sucintamente as expressões e recomendações de tais normas para previsão da resistência à punção de lajes lisas unidirecionais de concreto armado sem armadura de cisalhamento sujeitas ao puncionamento simétrico. Em todas os cálculos e expressões realizadas, serão removidos os coeficientes de segurança das normas, de tal modo que se possa estimar a resistência última característica das peças.

Resumidamente, o código [EC 2 \(2004\)](#) especifica o perímetro de controle de cantos arredondados à “ $2,0 \cdot d$ ” da face do pilar e o perímetro externo à “ $1,5d$ ” da última camada da armadura de cisalhamento, quando houver. A norma [MC 2010 \(2011\)](#) adota de maneira similar os cantos arredondados, porém fixa a localização a “ $0,5d$ ” da face do pilar, assim como também prescreve a norma norte americana [ACI 318 \(2019\)](#) sem cantos arredondados, conforme mostrado na Figura 4.1. Esta última com perímetro externo a “ $0,5 \cdot d_v$ ” da última camada da armadura de cisalhamento, onde “ d_v ” é a altura útil tomada comumente em estudos paramétricos como “ $d - 25 \text{ mm}$ ” para lajes (em que 25 mm é o cobrimento de concreto), conforme [Choi e Kim \(2012\)](#) e também [Lips, Fernádes e Muttoni \(2012\)](#).

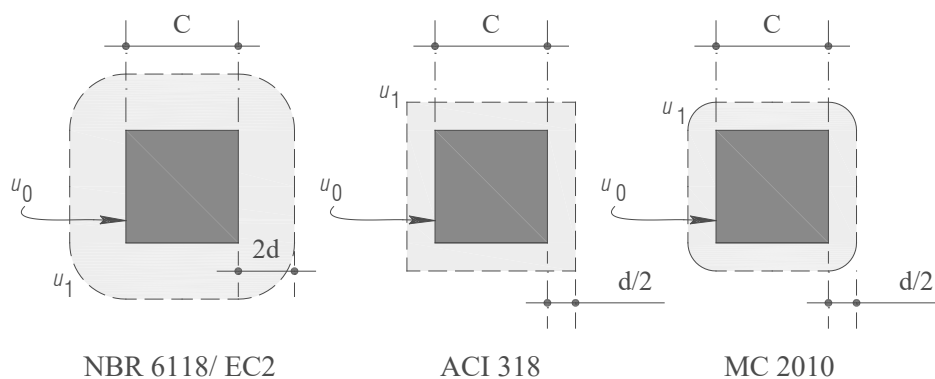


Figura 4.1 – Perímetros de controle das normas estudadas

A norma EC-2 (2004) multiplica o esforço de cisalhamento de cálculo por β para que se leve em consideração os efeitos de corte irregular devido a reações de apoio excêntricas, nas quais a MC-2010 (2011) reduz o esforço de cisalhamento de cálculo pelo fator k_e . Logo, em pilares internos (ou de centro), em casos onde a estabilidade lateral não depende do contraventamento (*frame action*), β pode ser tomado como “1,15” e k_e como 0,9. A máxima tensão de cisalhamento na laje na região em torno do pilar é limitada a “ $0,3 \left(1 - f_{ck}/250\right) f_{ck}/\gamma_c$ ” pela EC-2, na qual γ_c é o fator de segurança do concreto que na EC2 e na MC-2010 é adotado como 1,5. Ambos os códigos normativos tomam a tensão de escoamento do aço de cálculo como f_{yk}/γ_s , onde o $\gamma_s = 1,15$ e para a pesquisa é tomado como 1,0.

4.1. ACI 318 (2019)

A norma americana, a qual foi uma das primeiras a tratar o problema da punção em placas de concreto armado, pois desde 1913 já abordava sobre o assunto, determina atualmente para a resistência de lajes sujeitas à punção que:

$$V_n = V_c + V_s \quad \text{Equação 4.1}$$

Onde:

- $V_n = V_{Rd}$ – força de cisalhamento nominal, calculada pela Equação 4.1 (kN);
- V_c – força resistente oriunda do concreto (kN);
- V_s – força resistente proveniente da armadura de cisalhamento (kN).

No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, a carga de ruptura à punção da ligação laje-pilar é dada apenas pela resistência devida ao concreto e assume o menor valor dentre as Equações 4.2, 4.3 e 4.4 apresentadas abaixo.

$$V_c = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_0 \cdot d \quad \text{Equação 4.2}$$

$$V_c = \frac{1}{12} \cdot \left(2 + \frac{\alpha_s \cdot d}{b_0}\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_0 \cdot d \quad \text{Equação 4.3}$$

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_0 \cdot d \quad \text{Equação 4.4}$$

Onde:

- α_s : 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;
- β_c : razão entre o maior e o menor lado do pilar;
- b_0 : perímetro crítico [ACI 318](#) (mm);
- d : altura útil da laje ao longo do contorno crítico (mm);
- f_c : resistência à compressão do concreto (MPa).

A norma também determina que o perímetro de controle deve ficar a uma distância $0,5 \cdot d$ das faces do pilar.

4.2. EUROCODE 2 (2004)

A norma [EUROCODE 2 \(EC2\)](#) apresenta:

$$V_{Rd,c}(EC2) = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \left(1 + \left(\frac{200}{d}\right)^{1/2}\right) \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 4.5}$$

Onde $\rho = (\rho_x \cdot \rho_y)^{0,5} \leq 0,02$ ou 2%, em que ρ_{x1} e ρ_{y1} são as taxas de armadura de flexão “ $A_{s1}/b \cdot d$ ” com “ d ” igual a altura útil da laje. O termo “ $1 + (200/d)^{1/2}$ ” representa o *size effect* com o valor máximo de 2,0.

A área de aço requerida para o combate ao cisalhamento é calculada como segue abaixo:

$$1,5A_{sw} \frac{d}{s_r} \geq \frac{\beta V_{Ed} - 0,75V_{Rd,c}}{f_{ywd,ef}} \quad \text{Equação 4.6}$$

Onde “ A_{sw} ” é a área de armadura de cisalhamento no perímetro, s_r é o espaçamento radial da armadura de cisalhamento e “ $f_{ywd,ef} = (250 + 0,25d) \leq f_{ywd}$ ”, em que “ $f_{ywd,ef}$ ” e “ f_{ywd} ” são, respectivamente, a tensão efetiva de cálculo e a tensão de escoamento de cálculo da armadura de cisalhamento.

Para limitar a tensão máxima de cisalhamento em torno do pilar, a EC2 estabelece o máximo esforço de cisalhamento possível de $\alpha V_{Rd,c}$, onde α é um parâmetro com valor recomendado de 1,5 que é aumentado para 2,0 no Reino Unido através da UK National Annex ([BSI, 2004b](#)).

A armadura de cisalhamento pode ser provida radialmente ou perpendicularmente ao pilar. O espaçamento radial do primeiro perímetro da armadura de cisalhamento dista do pilar entre “ $0,3 \cdot d$ ” e “ $0,5 \cdot d$ ”. O espaçamento máximo radial dos perímetros sucessivos da armadura é “ $0,75 \cdot d$ ”. O espaçamento circular dos estribos da laje não deve exceder “ $1,5 \cdot d$ ” do primeiro perímetro de controle e “ $2 \cdot d$ ” externamente, onde parte do perímetro contribui para a resistência ao puncionamento.

4.3. NBR 6118 (2014)

A norma brasileira prescreve, para pilares internos com carregamento simétrico, sem efeitos de momentos e sem armadura de punção, que a resistência ao puncionamento da laje de concreto armado para uma superfície crítica C é dada por:

$$V_{Rd,1}(NBR) = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \left(1 + \left(\frac{200}{d}\right)^{1/2}\right) \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 4.7}$$

Onde $\rho = (\rho_x \cdot \rho_y)^{0,5}$, em que ρ_x e ρ_y são as taxas geométricas de armadura de flexão aderentes nas duas direções ortogonais ($A_{S(x,y)}/b \cdot d$) com “d” igual a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C', externo ao contorno C da área de aplicação da força e deste distante 2d no plano da laje, calculada por $d = (d_x + d_y)/2$. O termo “ $1 + (200/d)^{1/2}$ ” representa o *size effect*. Neste caso, nenhum dos valores acima sofre limitação máxima ou mínima nos intervalos de aplicação, diferentemente da norma [EUROCODE 2 \(2004\)](#).

Deve-se ainda efetuar a verificação da tensão resistente de compressão diagonal do concreto na superfície crítica C em lajes submetidas a punção, com ou sem armadura.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd,2} = 0,27 \cdot \alpha_v \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{Equação 4.8}$$

Onde,

$$\alpha_v = (1 - f_{ck}/250) \quad \text{Equação 4.9}$$

Com f_{ck} em MPa.

E, τ_{Sd} calculado com u_0 (perímetro do contorno C) em lugar de u distante $2d$ da face do pilar no plano da laje.

O valor de $\tau_{Rd,2}$ pode ser ampliado em 20 % por efeito de estado múltiplo de tensões junto a um pilar interno, quando os vãos que chegam a esse pilar não diferem mais de 50 % e não existem aberturas junto ao pilar.

4.4. MODEL CODE 2010 (2011)

Apesar de não ser uma norma oficial, o [Model Code 2010 \(MC 2010\)](#) é reconhecido internacionalmente pelo meio acadêmico. Possui quatro estádios de cálculo que são classificados por grau, do menos preciso (1) ao mais preciso (4) nos resultados; assim, o 1º, 2º e 3º tem aplicações mais indicadas para dimensionamentos e o 4º, para avaliação.

Para fins de cálculos iniciais do caso estudado nesta pesquisa, a resistência ao cisalhamento é calculada em termos da rotação da laje “ ψ ”, em que o nível I calcula conforme a Equação 4.10 e no nível II acrescenta a relação m_s/m_r , que, segundo [Ruiz e Muttoni \(2009\)](#) pode ser substituída pela relação P_u/P_{flex} . O Nível III é recomendado para lajes com geometria irregular, de relação entre vãos l_x/l_y , com valores fora do intervalo de 0,5 e 2,0. Posteriormente, através do nível IV de aproximação, a rotação é obtida através de análise não linear considerando a fissuração, rigidez (*tension stiffening*), escoamento da armadura e todos os demais efeitos não lineares relevantes para uma análise precisa da estrutura, conforme recomenda a própria norma. Neste caso, o cálculo da rotação é realizado através do software ABAQUS/CAE 6.14, que é apresentado no capítulo a seguir para as lajes do programa.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s \cdot f_{yd} \cdot m_s}{d \cdot E_s \cdot m_r} \quad \text{Equação 4.10}$$

Onde “ $r_s = 0,22 \cdot L$ ” é a posição onde o momento fletor é zero distante em relação ao eixo do pilar, “ f_{yd} ” é tensão de escoamento e “ E_s ” é o módulo de elasticidade da armadura. Logo, a resistência à punção é calculada como:

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad \text{Equação 4.11}$$

Onde:

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d_v \quad \text{Equação 4.12}$$

Em que “ f_{ck} ” em MPa é a resistência à compressão do concreto e “ d_v ” é a altura útil, que pode ser tomada como “ d ”, e “ b_0 ” é o perímetro de controle para esta norma.

O parâmetro “ k_{ψ} ” depende da rotação da laje em torno do apoio e é calculado como:

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot k_{dg} \cdot \psi \cdot d} \leq 0,6 \quad \text{Equação 4.13}$$

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad \text{Equação 4.14}$$

Em que “ d_g ” é o diâmetro máximo do agregado graúdo utilizado.

4.4.1. TEORIA DA FISSURA CRÍTICA DE CISALHAMENTO (2008)

O modelo de cálculo de ligações laje-pilar adotado pelo MC 2010 é inteiramente baseado nos estudos desenvolvidos por Muttoni (2008), chamado de Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) aplicado às vigas e lajes de concreto armado, em cisalhamento uni ou bidirecional, no qual se considera a superfície de ruptura ocorrendo a 45° e que a resistência final é inversamente proporcional à rotação da peça $\psi \cdot d$.

Esta considera a rotação do elemento e engrenamento dos agregados devido à propagação da fissura crítica que corta a biela de compressão responsável pelo equilíbrio, e está diretamente ligada à rugosidade da superfície da fissura através do diâmetro máximo de agregado graúdo, conforme expressa a Equação 4.15 que prevê a resistência de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento.

$$V_{Rc} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_1 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_g + d_{g0}}} \quad \text{Equação 4.15}$$

Onde:

- $u_1 = b_0$ – perímetro de controle a $d/2$ da face do pilar (mm);
- d_g – diâmetro máximo do agregado graúdo (mm);
- d_{g0} – diâmetro do agregado graúdo de referência (16 mm).

5. PROGRAMA EXPERIMENTAL

O programa experimental foi executado no Laboratório de Engenharia Civil (LEC) da Universidade Federal do Pará (UFPA) com o apoio e todo o aparato técnico do Grupo de Análise Experimental em Estruturas e Materiais (GAEMA), com o objetivo de avaliar e calibrar modelos numéricos computacionais para alimentação do banco de dados de lajes lisas unidirecionais de concreto armado. Um total de 9 (nove) lajes lisas unidirecionais de concreto armado inspiradas nos trabalhos de [Carvalho \(2006\)](#), [Ferreira \(2006\)](#) e [Damasceno \(2007\)](#) foram executadas e agrupadas em 3 partes. O primeiro grupo é composto de taxa de armadura longitudinal secundária (y) de 0,5% e pilares de índice de retangularidade 1, 3 e 5 (*L1A*, *L1B* e *L1C*); o segundo grupo, de taxa de armadura secundária de 1% e índices 1, 3 e 5 (*L2A*, *L2B* e *L2C*); e o terceiro e último grupo contém taxa de armadura de 2% e índices 1, 3 e 5 (*L3A*, *L3B* e *L3C*). Todas as lajes armadas na direção principal (x) contêm taxa de 1%, aproximadamente.

As lajes de dimensões de $(1800 \times 1800 \times 120)$ mm, apresentam altura útil aproximada de 95 mm e distância do eixo da armadura principal até a face inferior da laje de aproximadamente 25 mm. A Tabela 5.1 apresenta a armadura principal constituída por 13 \emptyset 12,5 c/ 147 mm (1% aproximadamente) em todas as lajes, e as armaduras secundárias são compostas por 7 \emptyset 12,5 c/ 293 mm (0,59%), 13 \emptyset 12,5 c/ 147 mm (1,09%) e 25 \emptyset 12,5 c/ 73 mm (2,1%), conforme ilustrado nas Figuras 5.2 a 5.10. Para o melhor desempenho da ancoragem das armaduras principais (*direção x*), foram feitos ganchos nas extremidades das barras (Figura 5.1). Na superfície inferior comprimida do concreto foi instalada armadura de distribuição composta por 10 \emptyset 6,3 c/ 198 mm em cada direção (x,y).

Tabela 5.1 – Características das lajes

Laje	d (mm)	l_x mm	l_y mm	ρ_x (%)	ρ_y (%)	f_{ys} (MPa)	f_c (MPa)	c_{\min} (mm)	c_{\max} (mm)	c_{\max}/c_{\min}
L1A					0,59%				85	1
L1B					0,59%				255	3
L1C					0,59%				425	5
L2A					1,09%				85	1
L2B	95	1600	1800	0,94%	1,09%	573	28	85	255	3
L2C					1,09%				425	5
L3A					2,11%				85	1
L3B					2,11%				255	3
L3C					2,11%				425	5

Dados: l_x - distância entre apoios; l_y - largura da laje; ρ_x - taxa de armadura na direção principal; ρ_y - taxa de armadura na direção secundária; c_{\min} - menor dimensão do pilar e c_{\max} - maior dimensão do pilar.

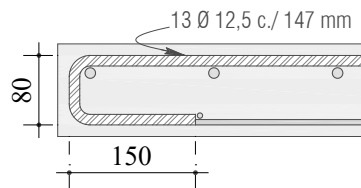


Figura 5.1 – Detalhe da ancoragem da armadura principal (mm)

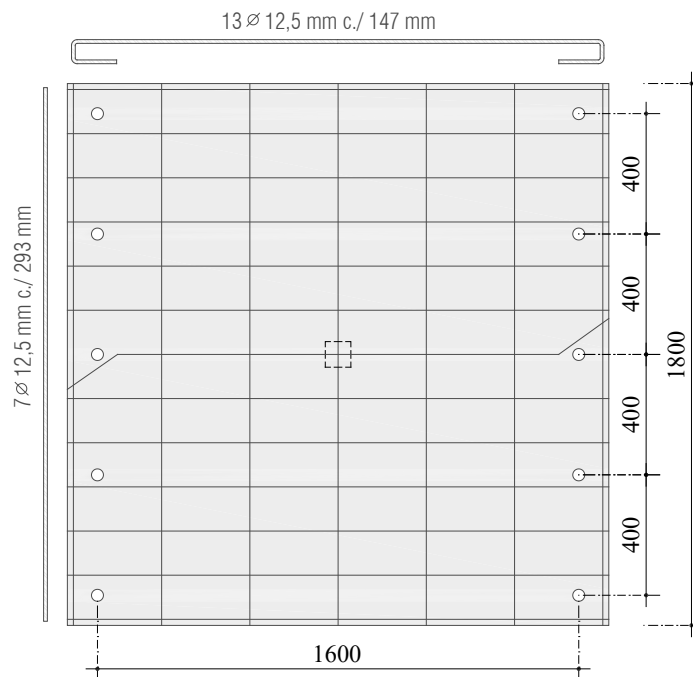


Figura 5.2 – Armaduras L1A (mm)

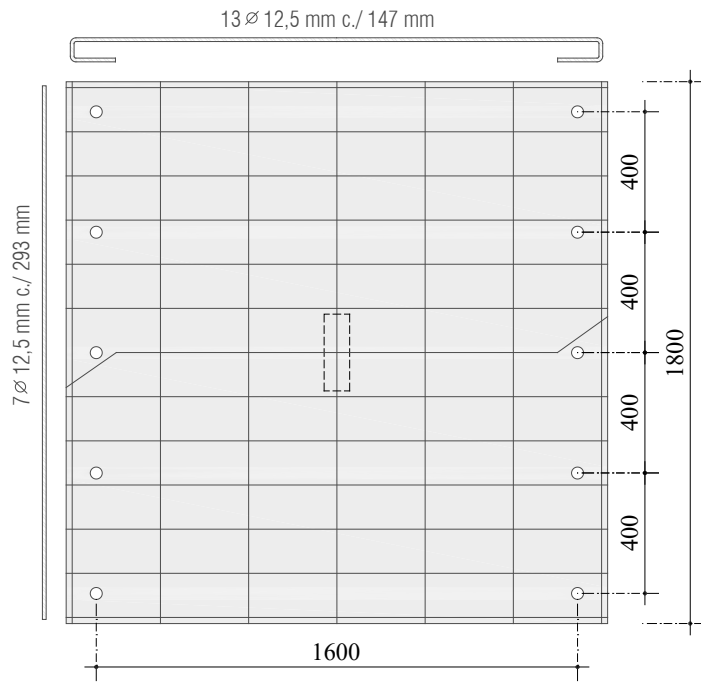


Figura 5.3 – Armaduras L1B (mm)

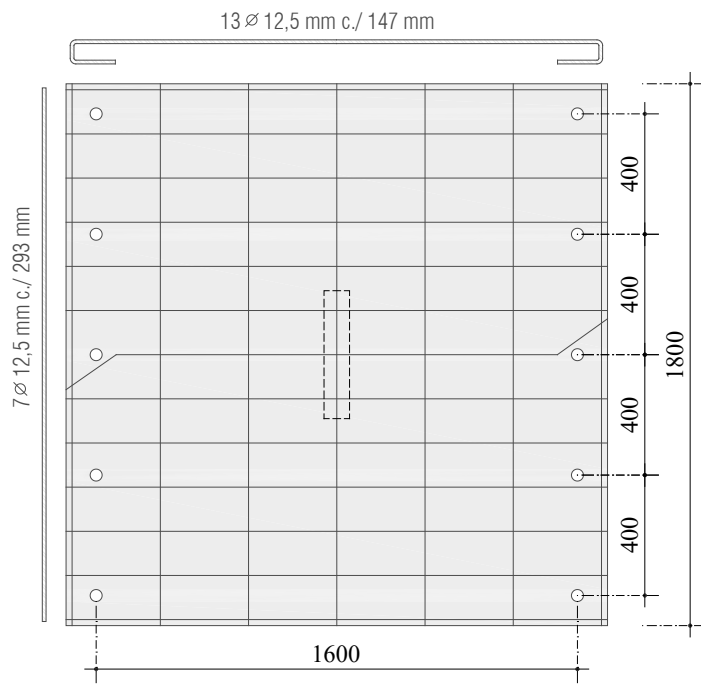


Figura 5.4 – Armaduras L1C (mm)

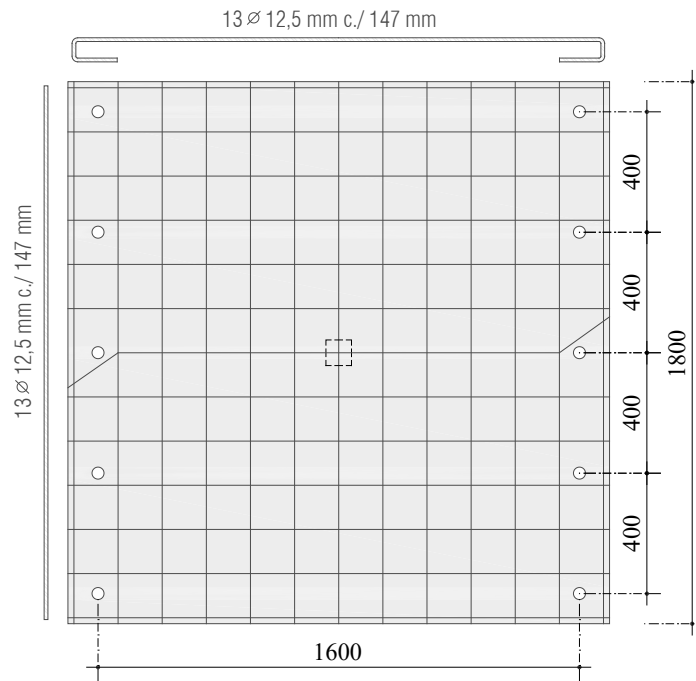


Figura 5.5 – Armaduras L2A (mm)

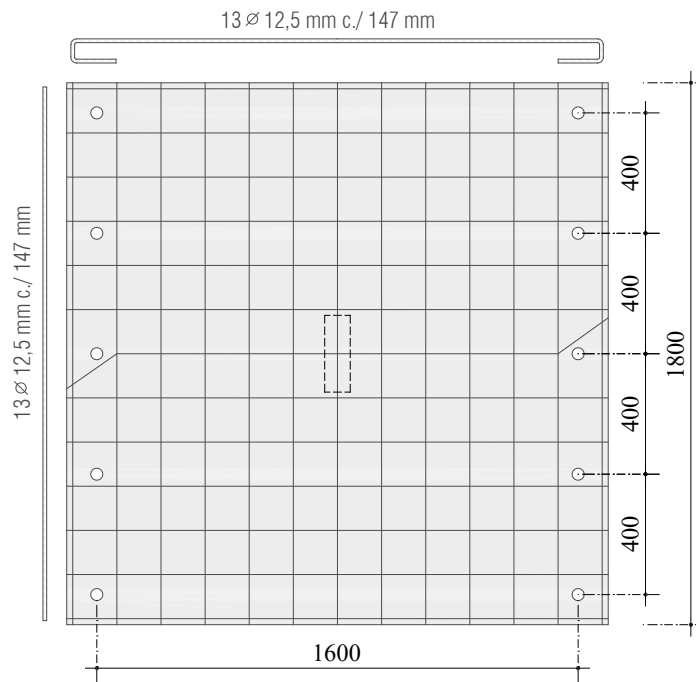


Figura 5.6 – Armaduras L2B (mm)

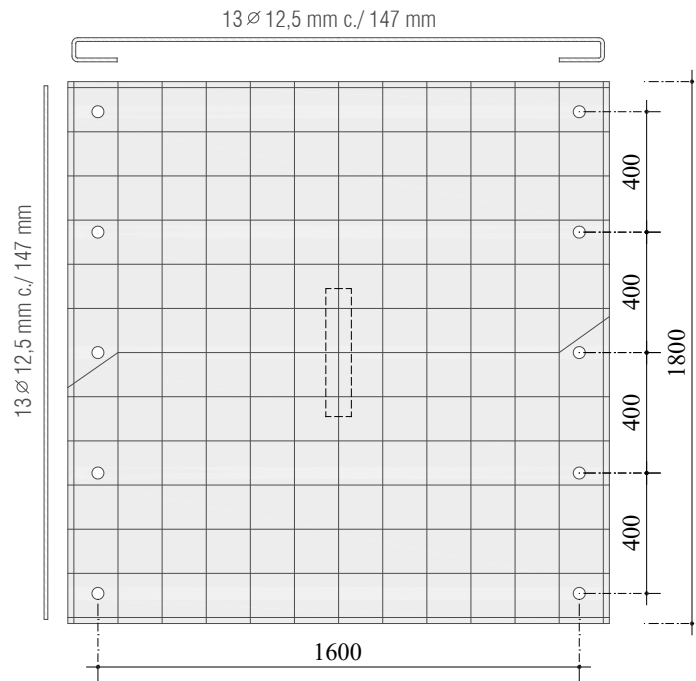


Figura 5.7 – Armaduras L2C (mm)

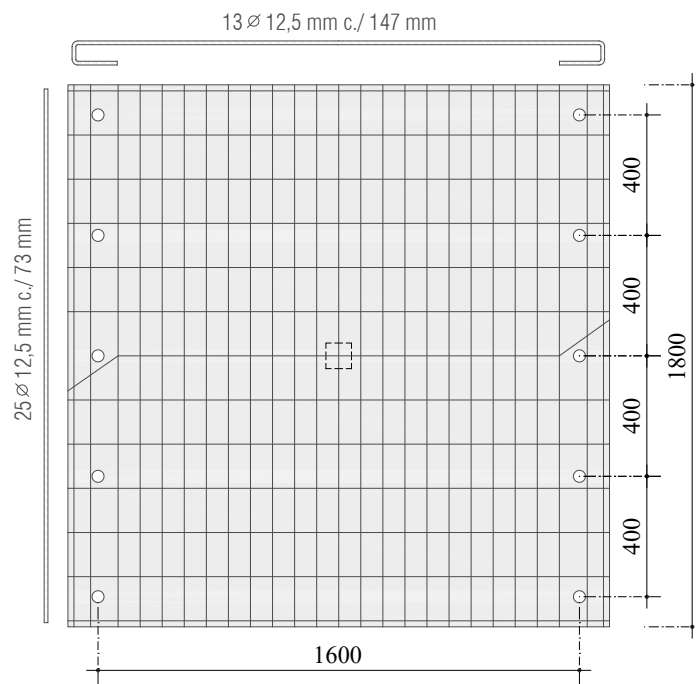


Figura 5.8 – Armaduras L3A (mm)

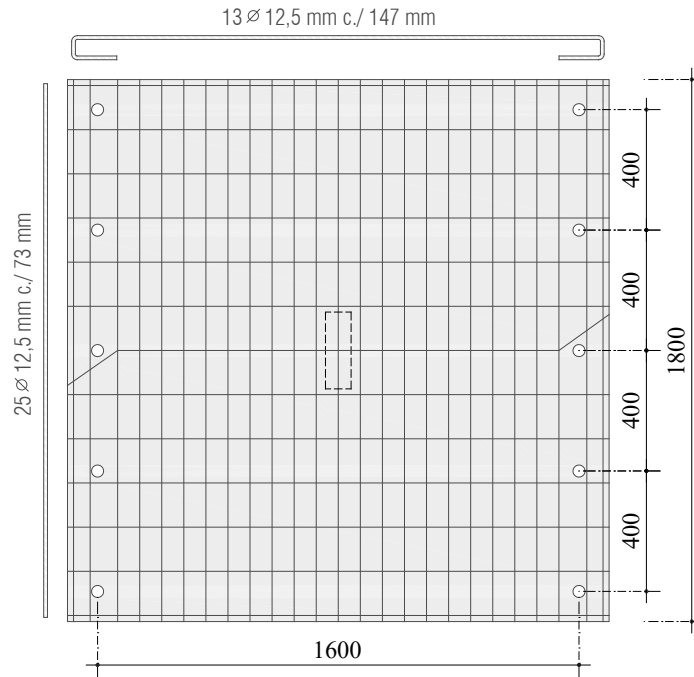


Figura 5.9 – Armaduras L3B (mm)

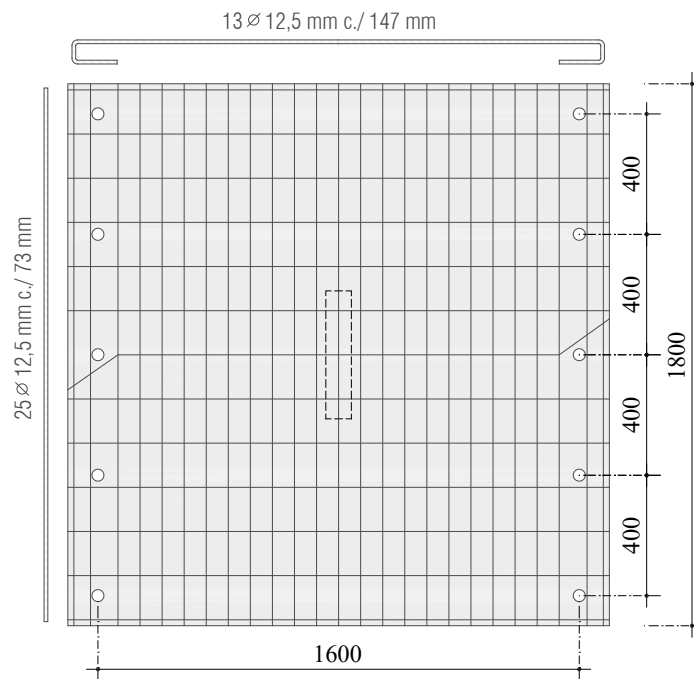


Figura 5.10 – Armaduras L3C (mm)

Para aplicação do carregamento, foram utilizados pilares de tipo A, B e C de dimensões (85 × 85) mm, (85 × 255) mm e (85 × 425) mm (Figura 5.11), respectivamente, simulando uma situação de ligação laje-pilar interno (central) com carregamento concentrado simétrico. A série “A” foi projetada com pilar metálico e as séries “B” e “C”, com pilares de concreto armado e 6 Ø 10,0 – 350 mm (com gancho de 120 mm cada), ambos com estribos de 3 Ø 5,0 c/ 70 mm.

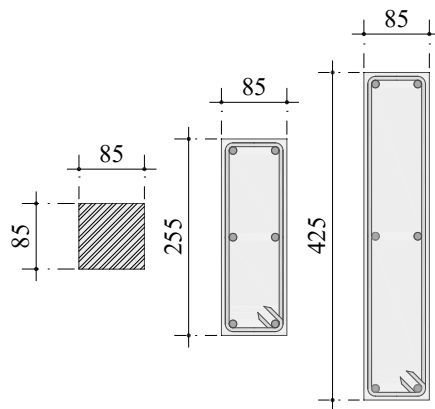


Figura 5.11 – Seção e armadura dos pilares A, B e C (mm)

Todas as lajes foram concretadas no próprio LEC com concreto usinado de resistência nominal de 28 MPa e slump 100 ± 10 mm, composto de cimento tipo CP II Z 32, areia derivada do arenito e brita derivada do calcário, com diâmetro máximo de 16 mm. No mesmo local, também foram cortadas e dobradas todas as armaduras das lajes constituídas de barras de aço CA-60 (\varnothing 5,0 mm) e CA-50 (6,3 / 10 e 12,5 mm).



Figura 5.12 – Espessura da laje em corte (cm)

5.1. Materiais

É essencial o controle tecnológico dos materiais em uso nesta pesquisa, tendo em vista que o desempenho do elemento estrutural depende diretamente das propriedades físicas e mecânicas dos materiais aplicados.

5.1.1. AÇO

O aço é um produto siderúrgico com porcentagem de carbono entre 0,008% e 2%. Os aços destinados ao concreto armado (armadura passiva) são chamados de aços-carbono e possuem teor de carbono $< 0,5\%$. São aços de dureza natural, laminados a quente ou encruados a frio. As formas encontradas para os aços são duas: as barras e os fios. Os aços para concreto armado são classificados de acordo com a norma [NBR7480 \(1996\)](#). As barras são produtos de bitola (diâmetro da seção transversal nominal, \emptyset) de 4,2 mm a 40 mm, obtidos por laminação a quente. As barras se apresentam no comércio com comprimentos de aproximadamente 12 metros, admitindo-se uma tolerância de 9%.

O aço utilizado nos experimentos foi caracterizado a partir de ensaios de tração realizados em seis amostras de aço, sendo três com 5,0 mm (CA-60) e três com 12,5 mm de diâmetro (CA-50) e 600 mm de comprimento. Todas as amostras são do mesmo lote para fins de determinação das propriedades mecânicas do aço – resistência a tração, módulo de elasticidade, tensão de escoamento e de ruptura – na máquina universal de ensaio do Laboratório de Engenharia Civil da UFPA. As deformações foram medidas com extensômetros mecânicos e os ensaios seguiram as recomendações da [NBR 6152 \(1992\)](#). A Figura 5.13 mostra o tipo de ensaio realizado nas amostras de aço.

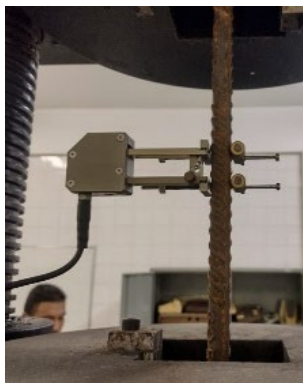


Figura 5.13 – Ensaio de tração das armaduras

5.1.2. CONCRETO

Na concretagem dos elementos estruturais, empregou-se concreto usinado com abatimento (*slump*) de 10 ± 1 mm que corresponde a um grau de trabalhabilidade normal. Suas propriedades mecânicas foram obtidas experimentalmente a partir de 9 corpos-de-prova cilíndricos de (100 x 200) mm, os quais foram submetidos à ensaios destrutivos de compressão axial, compressão diametral e módulo de elasticidade. A dimensão máxima característica do agregado graúdo foi 19 mm. A Figura 5.14 mostra a moldagem dos corpos-de-prova e a Figura 5.15 mostra os ensaios realizados.

Segundo [MONTROYA et al. \(2000\)](#), resultados comparativos obtidos através de ensaios de corpos de prova de dimensões diferentes mostram que os de maiores dimensões, portanto, com maior volume de concreto, apresentam resistências menores. A justificativa está no fato de que, para maiores volumes, o índice de vazios é maior e, por conseguinte, é mais deformável e apresenta resistências menores. A diferença de dimensão, quando do estudo do módulo de elasticidade, também pode resultar em variabilidade nos resultados, visto que esta propriedade também é conhecida através de um ensaio semelhante à resistência à compressão.

A determinação da resistência à compressão do concreto foi estabelecida a partir de ensaios de compressão axial em 3 corpos de prova, realizados de acordo com a [NBR 5739 \(1994; 2018\)](#). Para a determinação da resistência à tração, também foram utilizados 3 corpos de prova cilíndricos de mesmas dimensões de acordo com a [NBR 7222 \(1994; 2011\)](#). Os módulos de elasticidade foram obtidos de acordo com a [NBR 8522 \(1984; 2017\)](#), e para tanto, também através dos ensaios de 3 corpos de prova cilíndricos.



Figura 5.14 – Moldagem dos corpos de prova

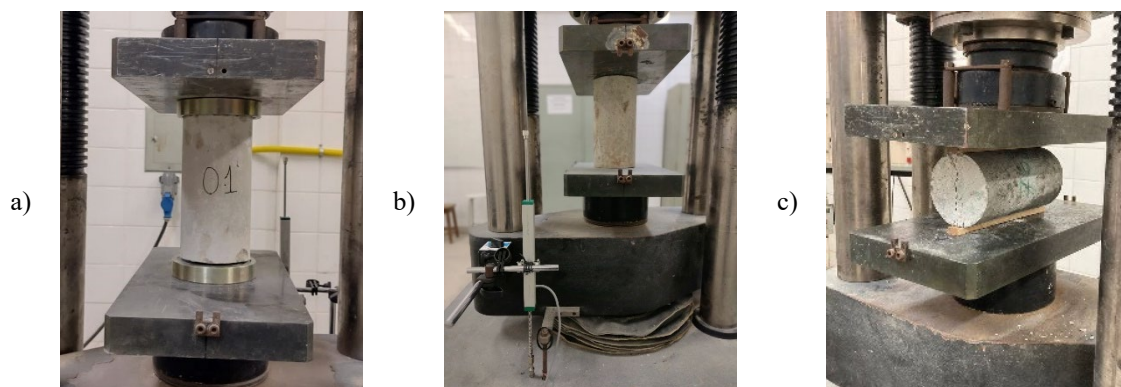


Figura 5.15 – Ensaio de compressão axial, módulo de elasticidade e compressão diametral

5.2. Instrumentação

5.2.1. DEFORMAÇÕES

As deformações foram verificadas através de extensômetros de resistência elétrica do tipo *strain gauges*, fabricados pela empresa KYOWA ELECTRONIC INSTRUMENTS CO. LTD., do tipo KC-80-120-A1-11, com comprimento de 84 mm, fator $2,13 \pm 1\%$ e resistência de $120,2 \pm 0,2$ ohms. Os extensômetros foram utilizados para monitoramento do concreto, e dispostos conforme ilustrado entre a Figura 5.16 e a Figura 5.18; aparecem na cor vermelha, no meio do vão, na superfície inferior da laje, com o objetivo de monitorar as máximas deformações de compressão durante os ensaios.

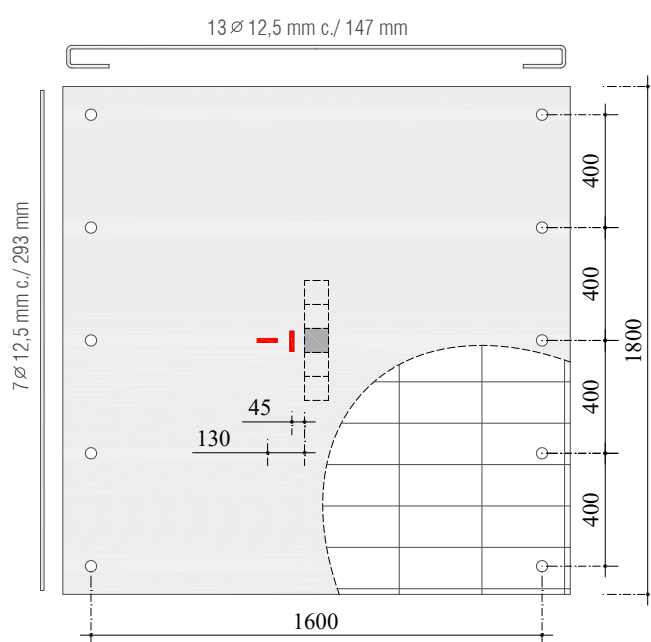


Figura 5.16 – *Strain gauges* do concreto (Lajes: L1A, L1B e L1C) (mm)

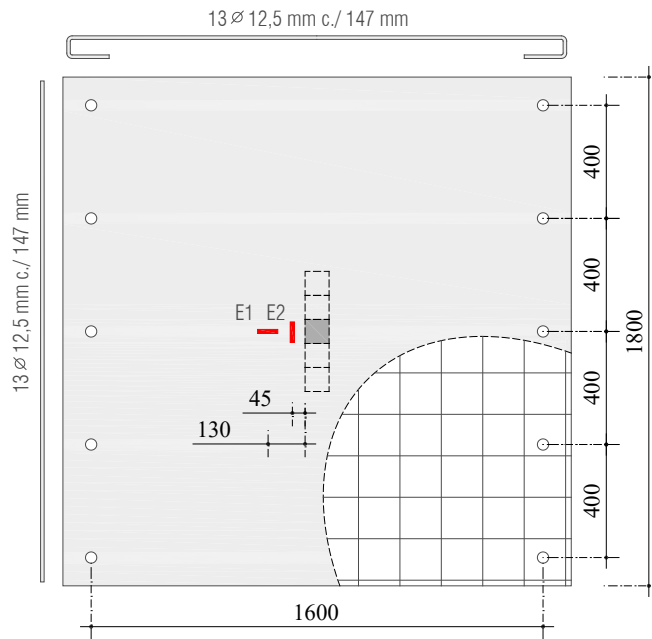


Figura 5.17 – *Strain gauges* do concreto (Lajes: L2A, L2B e L2C) (mm)

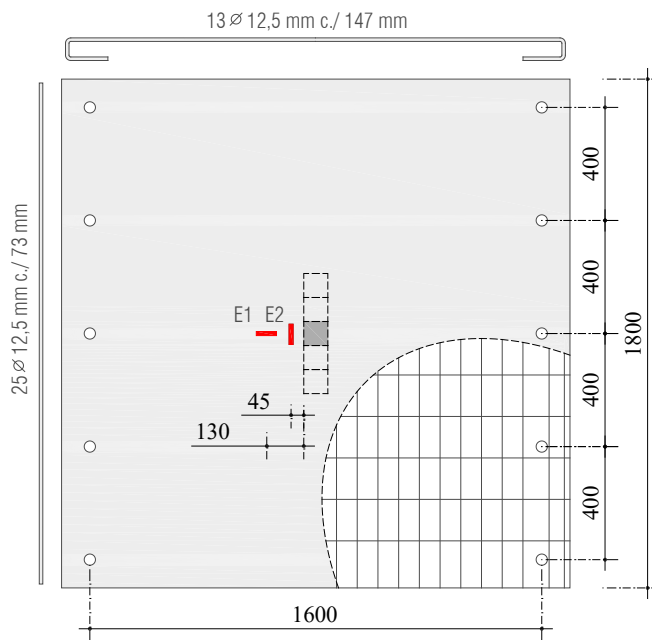


Figura 5.18 – *Strain gauges* do concreto (Lajes: L3A, L3B e L3C) (mm)

Para o monitoramento das deformações das armaduras, foram utilizados *strain gauges* do tipo KFC-5-120-C1-11 com comprimento de 5 mm, fator $2,11 \pm 1\%$ e resistência de $119,8 \pm 0,2$ ohms, conforme mostrado da Figura 5.19 à Figura 5.21.

A distribuição dos *strain gauges* foi elaborada simetricamente, visando o monitoramento simultâneo do possível esmagamento do concreto e escoamento das armaduras de flexão, facilitando a caracterização do modo de ruptura das peças por flexão/punção.

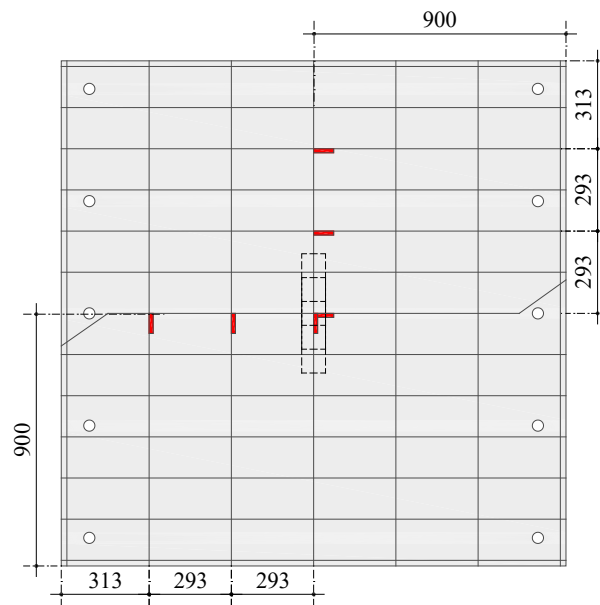


Figura 5.19 – *Strain gauges* do aço (Lajes: L1A, L1B e L1C) (mm)

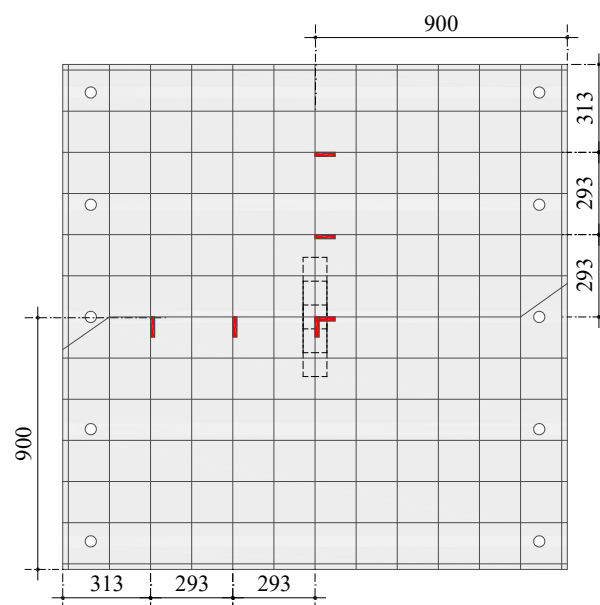


Figura 5.20 – *Strain gauges* do aço (Lajes: L2A, L2B e L2C) (mm)

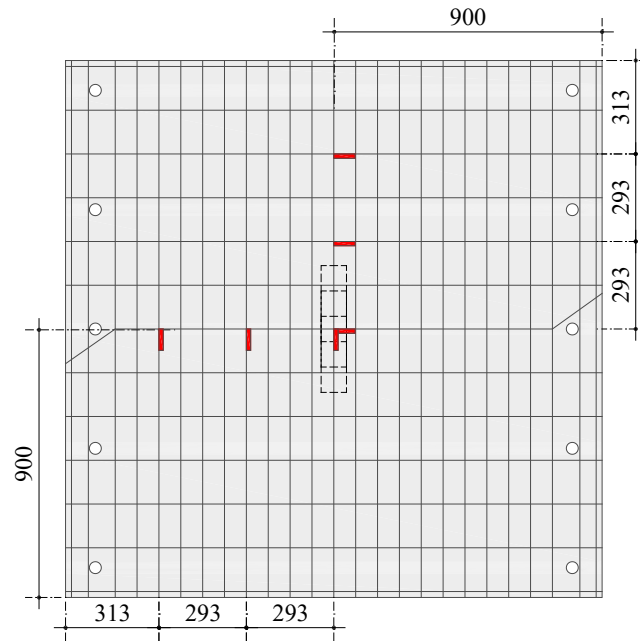


Figura 5.21 – Strain gauges do aço (Lajes: L3A, L3B e L3C) (mm)

5.2.2. DESLOCAMENTOS

Para o monitoramento dos deslocamentos verticais, foram utilizados transdutores lineares de posição ou *Linear Variable Differential Transformers* (LVDT) da empresa SONSEIKO SENSER da SONSEIKO CORPORATION, do tipo KTR-150MM, de resistência de 5000 ohms $\pm 20\%$ e de precisão de 0,001 mm. As flechas foram monitoradas em 3 (três) pontos posicionados simetricamente a partir do centro da laje (Figura 5.22), com objetivo de verificar o comportamento da laje em duas direções durante os ensaios e, assim, permitir posterior calibração dos modelos computacionais.

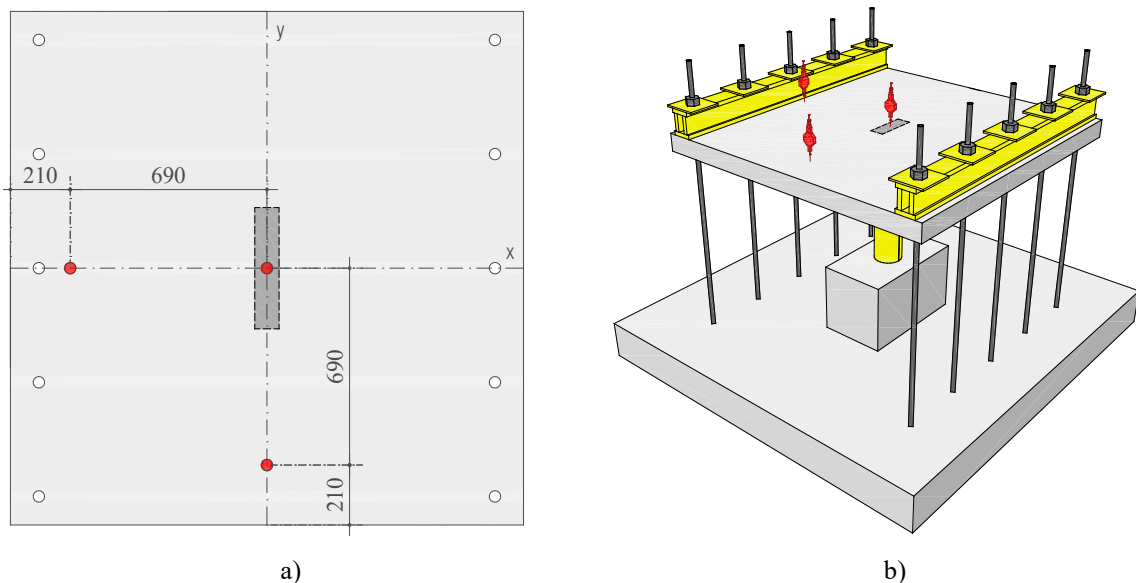


Figura 5.22 – Posicionamento dos LVDT em planta (a) e em perspectiva (b) (mm)

5.2.3. FISSURAÇÃO

Foram avaliados também os padrões de fissuração das lajes ensaiadas, pois tendem a ser influenciados pela taxa de armadura e índice de retangularidade dos pilares, assim como perceberam [Tassinari *et al.* \(2011\)](#) e [Einpaul \(2016\)](#).

Para isso, a marcação de fissuras foi realizada a partir de uma vista superior da laje e também com base no corte da seção transversal feito com serra circular, a exemplo da Figura 5.23. Os padrões de fissuração nos cortes tendem a mostrar se a zona de falha foi severamente danificada por fissuras de flexão e cisalhamento, se as placas de base e pilares penetraram mais profundamente nas lajes, bem como se houve a formação do tronco de cone e qual o ângulo e perímetro da fissura crítica de puncionamento, com atenção aos padrões de fissuração assimétricos em torno dos pilares, conforme apresentado na Figura 5.24.

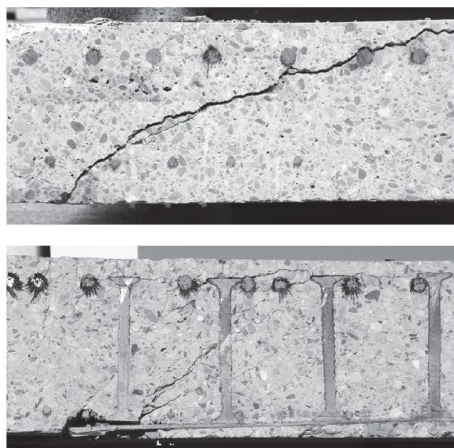


Figura 5.23 – Cortes de lajes ensaiadas à punção ([EINPAUL, 2016](#))

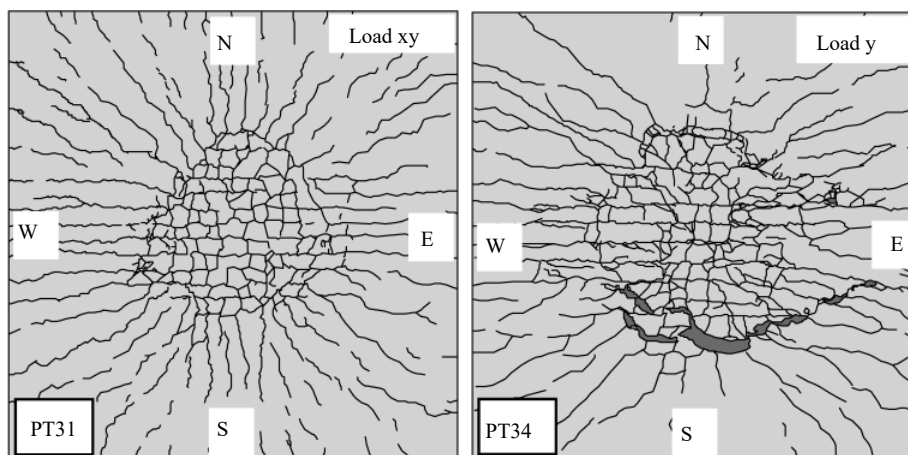


Figura 5.24 – Padrões de fissuração de lajes ensaiadas à punção ([TASSINARI *et al.*, 2011](#))

5.3. Sistema de Ensaio

As lajes foram ensaiadas no Laboratório de Engenharia Civil (LEC) - anexo A - da Universidade Federal do Pará (UFPA). O sistema simplesmente apoiado unidirecional foi fixado através de vigas metálicas e tirantes, conforme mostrado na Figura 5.25, simulando o punção como carregamento concentrado aplicado ao centro da laje e na direção vertical. O dispositivo de carregamento consistiu em um cilindro hidráulico da marca ENERPAC, do tipo HCG1008, 200 mm de curso, de comando elétrico com capacidade de carga de 1000 kN, apoiado sobre uma célula de carga da marca ALFA INSTRUMENTOS, do tipo 0002707 C-100T em aço liga níquelado com capacidade de 1000 kN e precisão de 1 kN. Previamente, as lajes foram submetidas a um pré-carregamento de 1 kN com objetivo de estabilização do sistema e aperto dos tirantes. A montagem do sistema de ensaio contou com auxílio de uma empilhadeira de capacidade de aproximadamente 50 kN. A Figura 5.26 e Figura 5.27 descrevem o sistema de ensaio em vistas bidimensionais e a Figura 5.28, em perspectiva.



Figura 5.25 – Sistema de ensaio

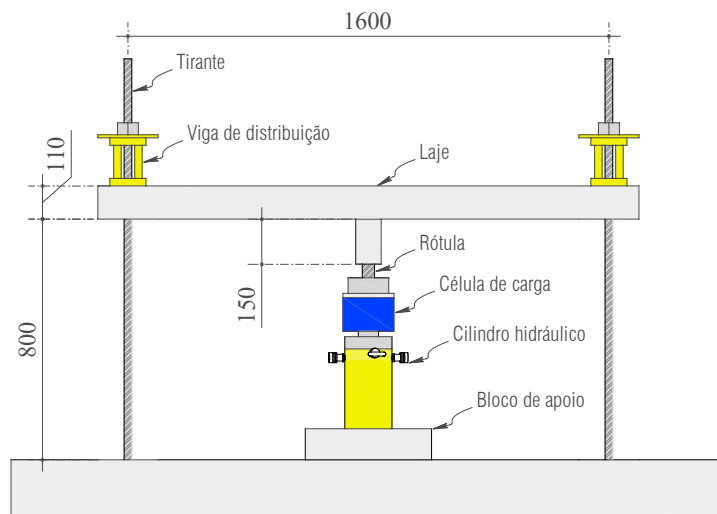


Figura 5.26 – Detalhe frontal do sistema de ensaio (mm)

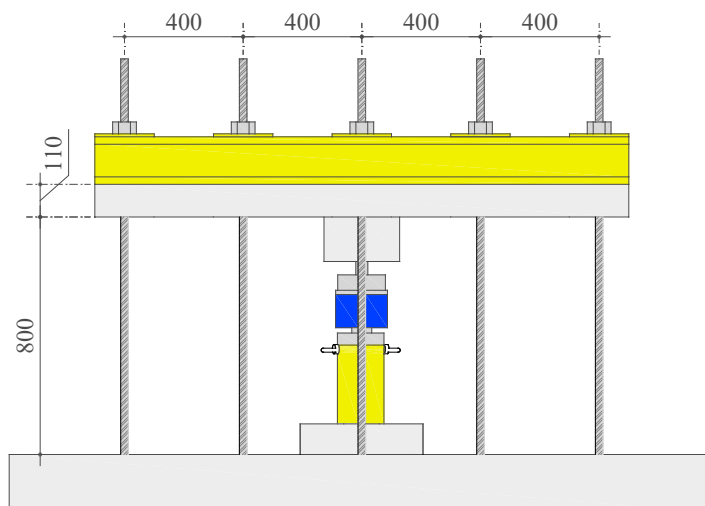


Figura 5.27 – Detalhe lateral do sistema de ensaio (mm)

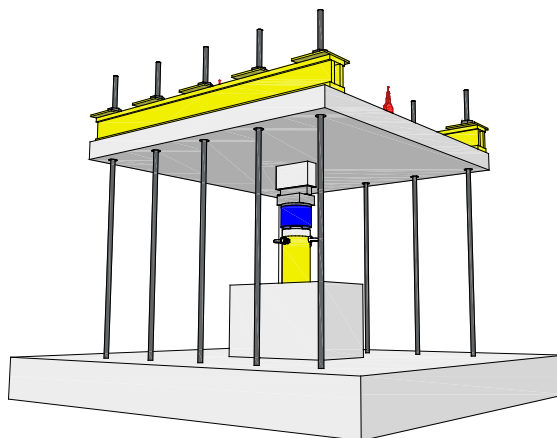


Figura 5.28 – Perspectiva do sistema de ensaio

5.4. Sistema de Aquisição de Dados

Os dados de deformação, deslocamentos e cargas foram obtidos a partir de um sistema modular de aquisição de dados desenvolvido na Universidade de São Paulo (USP - São Carlos) chamado BESSAN DIDAQ-B2, de excitação 2,5 V, faixa de entrada de $\pm 7,5$ mV/V, resolução máxima de 1 uE (*microstrain*) para *strain gauges*, faixa mínima de leitura $\geq \pm 10000$ uE e taxa de amostragem de até 10 Hz, mostrado na Figura 5.29. Através desse sistema, foi realizada a leitura dos extensômetros posicionados no aço e no concreto, dos transdutores de deslocamento e da célula de carga. A velocidade de aplicação de carga foi de aproximadamente 5 kN/min, por meio de sistema eletro-hidráulico composto por bomba e um cilindro hidráulico da marca ENERPAC com capacidade para 2000 kN (Figura 5.30), suficiente para a marcação de fissuras feitas a cada 5/10 kN, possibilitando a aquisição do comportamento da laje sem interrupções e um mapeamento completo de fissuras.



Figura 5.29 – Sistema de aquisição de dados e notebook



Figura 5.30 – Sistema de aplicação de carga

6. RESISTÊNCIA À FLEXÃO

Neste item é aplicado o método das linhas de ruptura de [Ingerslev \(1923\)](#), também conhecido como método das charneiras plásticas, para determinar a capacidade resistente à flexão, tanto das lajes ensaiadas em questão quanto das lajes apresentadas por outros autores. Esse método foi utilizado anteriormente por [Eltner e Hognestad \(1956\)](#), por [Park e Gamble \(1980\)](#), [Hallgren \(1994\)](#), [Oliveira \(2003\)](#), [Damasceno \(2007\)](#) e [Pinto \(2015\)](#), ambos com resultados considerados satisfatórios.

Para aplicação do processo, é necessário adotar uma possível configuração para as linhas de ruptura (Figura 6.1), nas quais deve atuar o momento resistente, pois a resistência última à flexão é estimada admitindo-se que as lajes sob ação da carga de ruptura dividem-se em painéis que giram em torno de “linhas” de plastificação das quais atua, perpendicularmente, o momento resistente.

Segundo [Langendonck \(1970\)](#), a ruína por flexão da laje ocorre quando a tensão de escoamento das barras que compõem as armaduras é atingida, e quando há o surgimento das linhas de plastificação formadas pela fissuração do concreto até a carga máxima calculada pela Equação 6.1

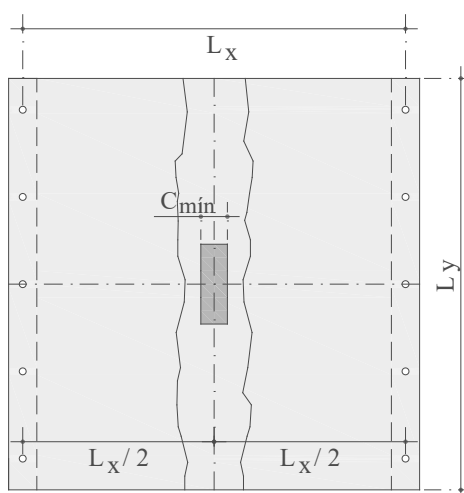


Figura 6.1 – Linhas de ruptura adotadas

$$P_{flex} = \frac{4 \cdot L_y \cdot m_u}{L_x - C_{min}} \quad \text{Equação 6.1}$$

Dados:

O momento fletor último por unidade de comprimento pode ser calculado através da análise do diagrama simplificado, representando os principais esforços atuantes em uma seção retangular de concreto armado à flexão, conforme a Equação 6.2 a seguir.

$$m_u = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,59 \cdot \rho \cdot \frac{f_{ys}}{f_c}\right) \quad \text{Equação 6.2}$$

6.1. Critérios para os Modos de Ruptura

Foram adotados como critérios primordiais os dados observados experimentalmente: deformações nas armaduras, deformações no concreto, padrão de fissuração e deslocamentos verticais. Como alternativa, foi adotada a relação entre a resistência última observada e a resistência à flexão calculada ($\frac{P_U}{P_{flex}}$) para a classificação do modo de ruptura (Oliveira, 2003), conforme especificado abaixo:

Ruptura por flexão;

$$\frac{P_U}{P_{flex}} > 1,0 \quad \text{Equação 6.3}$$

Ruptura por punção;

$$\frac{P_U}{P_{flex}} < 1,0 \quad \text{Equação 6.4}$$

Ruptura simultânea por punção e flexão com margem de influência de 10%;

$$\frac{P_U}{P_{flex}} \cong 1 (\pm 10\%) \quad \text{Equação 6.5}$$

Deve-se destacar que, segundo Elstner e Hognestad (1956), a observação experimental é prioridade, pois sendo este critério alternativo dependente das propriedades físicas dos materiais, e da resposta do sistema de ensaio em relação às configurações de linhas de ruptura adotadas, deve ser considerado como um método teórico para estimar as cargas de ruptura por flexão com possibilidade de variação.

6.2. Modelo de previsão para os modos de ruptura

Ainda neste capítulo, foi utilizado o modelo para previsão e análise do modo de ruptura de lajes lisas unidirecionais sem armadura de cisalhamento, proposto por [Oliveira e Ferreira \(2005\)](#), usado por [Vilhena *et al.* \(2006\)](#) e posteriormente revisto e ampliado por [Damasceno \(2007\)](#), que incluiu as prescrições de [Oliveira \(2003\)](#) para melhorar a precisão dos resultados, considerando os fatores de flexão na resistência à punção das lajes lisas unidirecionais de concreto armado.

Após o adoção correta da configuração das linhas de ruptura para as condições de apoio e carregamento da laje, chega-se na Equação 6.6 utilizando o procedimento realizado por [Ferreira e Oliveira \(2005\)](#), cuja expressão fornece o valor mínimo da dimensão do pilar (c_{flex}) posicionada perpendicularmente ao vão de uma laje unidirecional sujeita à carregamento simétrico e sem armadura de cisalhamento, teoricamente necessário para que ocorra o início de uma ruptura por flexão, favorecendo a ocorrência de uma ruptura dúctil.

$$c_{flex} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot m_u \cdot L_y}{0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} \cdot (L_x - c_{\min})} - c_{\min} - 2 \cdot \pi \cdot d \quad \text{Equação 6.6}$$

Com unidades em “mm”, “N × mm” e “MPa”.

Na previsão do modo de ruptura, a equação anterior também é utilizada para obter o valor mínimo da relação taxa de armadura secundária e taxa de armadura principal “ ρ_y/ρ_x ” através da relação “ C_{\max}/d ”, que pode contribuir para uma ruptura por flexão. Assim, chega-se à Equação 6.7, que relaciona tais fatores e possui parâmetros que levam em consideração as propriedades mecânicas médias do aço e do concreto, indicando quando a ruptura pode ocorrer por puncionamento ou por flexão.

$$\Psi_{(\beta)} = \frac{1}{(100 \cdot \rho \cdot f_c)^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^3 \cdot m_u \cdot L_y}{0,18 \cdot \xi \cdot d^2 \cdot (L_x - c_{\min})} \cdot \frac{1}{\beta + \Delta} \right]^6 \quad \text{Equação 6.7}$$

Com unidades em “mm”, “N × mm” e “MPa” e sendo:

$$\Psi_{(\beta)} = \rho_y / \rho_x;$$

$$\beta = c_{\text{máx}} / d;$$

$$\Delta = (c_{\text{mín}} / d) + 2\pi;$$

$$\xi = 1 + \sqrt{200/d}.$$

Desta maneira, o modo de ruptura das lajes pode ser estimado em função das taxas geométricas das armaduras longitudinal e transversal de flexão e da relação c_{flex}/d das lajes, onde c_{flex} é o menor comprimento do maior lado do pilar para que a ruptura seja dúctil ou por flexão. A partir desse modelo, foram obtidos os modos estimados com base nos dados constantes na Tabela 6.1. Adotando-se a taxa geométrica média de armadura para a confecção da curva de ductilidade proposta, com margem de influência de $\pm 10\%$ da flexão e considerando que a ruptura por flexão das lajes se inicie em aproximadamente 202,90 kN, as lajes foram avaliadas pelo critério exibido na Figura 6.2.

Tabela 6.1 – Propriedades consideradas

Laje	ρ_x/ρ_y	$c_{\text{máx}}/d$	ρ_y (%)	ρ_x (%)	d (mm)	f_c (MPa)	f_{ys} (MPa)	$c_{\text{máx}}/c_{\text{mín}}$	$c_{\text{mín}}$ (mm)
L1A	0,63	0,94	0,59					1	
L1B	0,63	2,83	0,59					2	
L1C	0,63	4,72	0,59					3	
L2A	1,17	0,94	1,09					1	
L2B	1,17	2,83	1,09	0,93	95	28	573	2	85
L2C	1,17	4,72	1,09					3	
L3A	2,26	0,94	2,10					1	
L3B	2,26	2,83	2,10					2	
L3C	2,26	4,72	2,10					3	

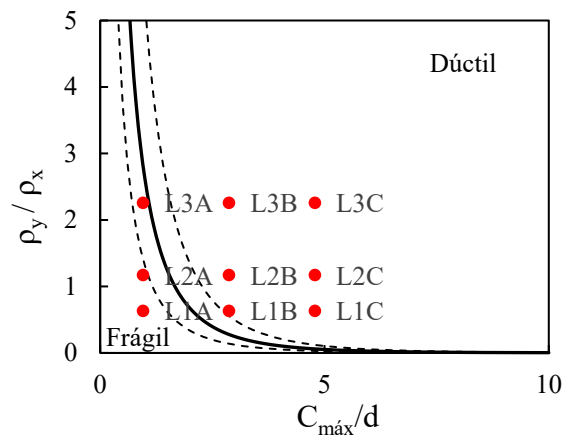


Figura 6.2 – Previsão dos modos de ruptura

Oliveira (2003) propôs fatores de flexão para ajuste das expressões dos códigos recomendados, que podem ser aplicados para lajes unidirecionais com vãos perpendiculares ao maior lado do pilar, calculado a partir da equação: “ $0,93 \cdot (C_{\text{máx}}/d)^{0,14}$ ” constante na Tabela 3.3. Logo, a Equação 6.7 foi ajustada levando-se em consideração esse fator, resultando na Equação 6.8 (Damasceno, 2007).

$$\psi_{(\beta)\lambda} = \frac{1}{(100 \cdot \rho \cdot f_c)^2} \cdot \left[\frac{1,86 \cdot 10^3 \cdot m_u \cdot L_y}{0,18 \cdot \xi \cdot d^2 \cdot (L_x - C_{\text{mín}})} \cdot \frac{\beta^{0,14}}{\beta + \Delta} \right]^6 \quad \text{Equação 6.8}$$

Os valores estimados pelas normas analisadas tenderam a divergir bastante entre si à medida que os índices de retangularidade aumentavam. Este comportamento deve-se ao fato de as normas não considerarem as condições de contorno das lajes em suas estimativas, no caso de lajes unidirecionais; apenas o EC2 considera a taxa geométrica de armadura diretamente enquanto o MC 2010 a considera indiretamente, conforme apresentado na Figura 6.3 e na Tabela 6.2. Observa-se que, a partir desta nova curva média, o modo de ruptura da laje L1A, que rompe por punção, fica mais evidente.

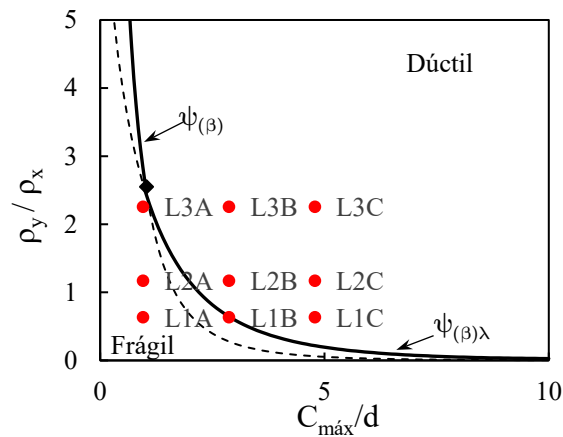


Figura 6.3 – Previsão dos modos de ruptura com o fator de flexão de Oliveira (2003)

Nota-se que, à medida que os índices de retangularidade aumentam, a proximidade de rupturas por flexão se torna mais evidente. Para esses modelos, as resistências das lajes não se alteraram significativamente com o incremento da taxa de armadura secundária, pois este último não é considerado nas previsões atuais de [ACI 318](#), [MC 2010](#) e [TFCC](#), para os mesmos índices de retangularidade, conforme mostra a Tabela 6.2. São observadas diferenças de aproximadamente 46% em lajes com índice 5 e destaca-se que as lajes L1A, L2A, L3A e L1B apresentam modo de ruptura teórico por punção.

Tabela 6.2 – Previsão de modos de ruptura (teóricos)

Laje	P_{ACI}	P_{NBR}	P_{EC2}	P_{MC2010}	P_{TFCC}	$P_{Oliveira2003}$	P_{flex}	Modo estimado (Fig. 6.3)
L1A	108,80	159,76	127,75	115,28	142,29	172,83	202,90	P
L2A	108,80	176,97	141,51	115,28	142,29	191,44	202,90	P
L3A	108,80	197,41	157,85	115,28	142,29	213,55	202,90	P
L1B	135,02	197,09	157,59	178,61	220,47	182,81	202,90	P
L2B	135,02	218,32	174,57	178,61	220,47	202,50	202,90	F
L3B	135,02	243,53	194,73	178,61	220,47	225,89	202,90	F
L1C	150,67	234,41	187,44	241,95	298,65	202,43	202,90	F
L2C	150,67	259,66	207,63	241,95	298,65	224,23	202,90	F
L3C	150,67	289,65	231,61	241,95	298,65	250,13	202,90	F

Legendas: P – Punção; FP – Flexo punção; F – Flexão.

Deste modo, a armadura longitudinal de combate a flexão foi dimensionada para que o processo de início de plastificação das armaduras se iniciasse, no mínimo, em aproximadamente 120% da resistência média geométrica de punção prevista pelas normas técnicas para as nove lajes do programa experimental ($P_{flex} \geq 1,2 \cdot \sqrt[n]{P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n}$).

7. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos durante os ensaios descritos no capítulo anterior. Foi estudado o comportamento das lajes, procurando-se sempre verificar a influência da taxa de armadura secundária e o índice de retangularidade dos pilares. Destaca-se que, em todos os casos, os modelos ensaiados foram executados sem armadura de cisalhamento, com a mesma taxa de armadura principal e a mesma resistência do concreto, na intenção de diminuir as variáveis atuantes e eliminar a contribuição dos estribos, favorecendo o desenvolvimento de ruptura por punção.

7.1. Propriedades dos materiais

7.1.1. AÇO

Os valores médios das tensões de escoamento e de ruptura, da deformação de escoamento e do módulo de elasticidade das seis amostras de aço de diâmetro 5,0 mm, 6,3 mm e 12,5 mm são apresentados na Tabela 7.1. Na Figura 7.1, podem ser observadas as curvas médias obtidas durante os ensaios das mesmas.

Tabela 7.1 – Propriedades do aço

\varnothing (mm)	CP (Qtde.)	f_{ys} (MPa)	f_u (MPa)	ϵ_{ys} (‰)	E_s (GPa)
5,0	3	670,0	700,0	4,60	257,70
6,3	3	540,0	650,0	2,30	234,78
12,5	3	573,0	685,0	2,35	243,83

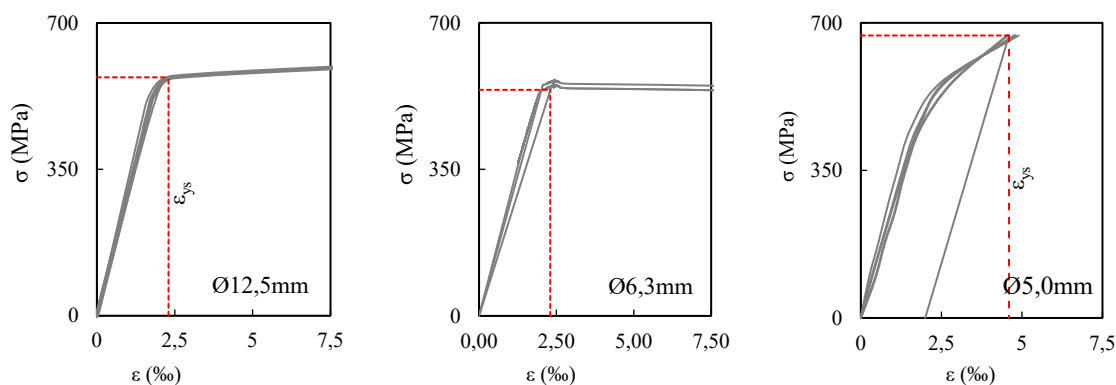


Figura 7.1 – Diagramas dos aços utilizados

Os resultados das propriedades mecânicas do aço contidas nos diagramas mostram todos os resultados obtidos para a armadura de flexão utilizada, indicando que houve pouca discrepância entre eles, uma vez que apresentaram variação menor que 10 %. Procurou-se, então, determinar a inclinação média em cada passo de carga imposto para se obter o valor médio do módulo de elasticidade. Adicionalmente, todas as amostras atenderam aos critérios de ductilidade da [NBR7480 \(1996\)](#), que admite que a tensão de ruptura f_u do aço utilizado seja, no mínimo, igual a $1,10 f_{ys}$ para aços com patamar de escoamento.

7.1.2. CONCRETO

A partir dos ensaios dos corpos de prova de concreto aos 28 dias de idade, foram obtidos os resultados médios de nove amostras cilíndricas de dimensões 100 x 200 mm utilizadas para a realização de ensaios de compressão axial (f_c), compressão diametral (f_{ct}) e módulo de elasticidade (E_c). Tais resultados experimentais são apresentados na Tabela 7.2 e na Figura 7.2, juntamente com as estimativas de resistência à tração e módulo de elasticidade previstas pela [NBR 6118 \(2014\)](#), calculadas a partir de f_c . Observa-se que os resultados experimentais ficaram próximos dos resultados teóricos.

Tabela 7.2 – Propriedades do concreto

A	CP	Experimental			Teórico*	
		f_c	f_{ct}	E_c	f_{ct}^*	E_{ci}^*
(mm)	(Qtde.)	(MPa)	(MPa)	(GPa)	(MPa)	(GPa)
100x200	3	28	2,3	26,63	2,77	29,63

* valores calculados conforme os itens 8.2.5 e 8.2.8 da [NBR 6118 \(2014\)](#)

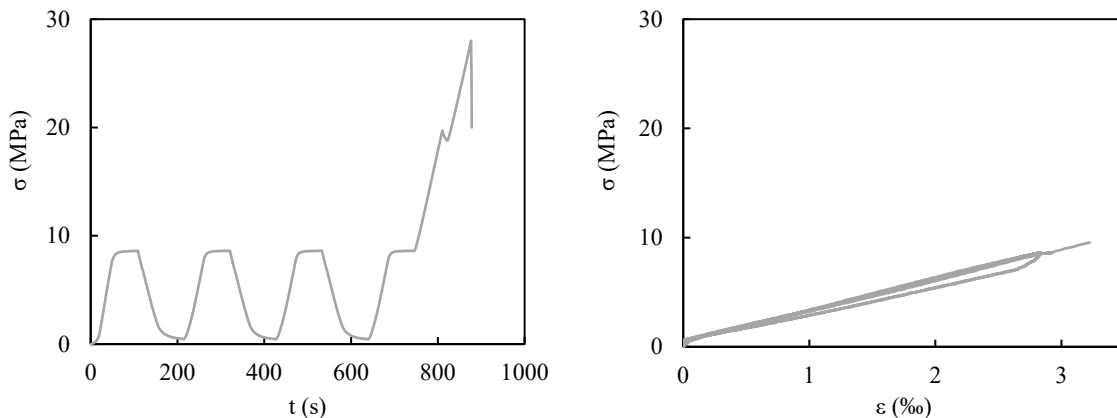


Figura 7.2 – Diagrama do concreto utilizado

7.2. Deformações

Madureira *et al* (2013) afirmam que a deformação é a mudança de comprimento original, dada uma devida solicitação. Tasdemir *et al* (1998) dizem que, até um determinado limite, as deformações são reversíveis após o descarregamento (*elasticidade*), e deformações plásticas acontecem antes do material atingir seu ponto máximo de resistência. Assim, este comportamento mecânico depende da rigidez, fragilidade e ductilidade do material. Nesta seção, apresentam-se os comportamentos carga (P) × deformação (ϵ) dos materiais, concreto e aço, adquiridos durante os ensaios das nove lajes.

7.2.1. DEFORMAÇÕES DE TRAÇÃO

Os dados de deformações foram obtidos por meio do uso de extensômetros elétricos de resistência instalados diretamente nas barras de aço. As armaduras foram monitoradas nas direções “x” e “y” na camada da armadura principal e secundária, respectivamente. Isto possibilitou a verificação de quais barras ultrapassaram a deformação de escoamento ($\epsilon_{ys} = 2,35 \text{ ‰}$) referente ao diâmetro $\varnothing 12,5 \text{ mm}$ utilizado na composição da armadura de flexão.

A locação dos extensômetros seguiu aquela mostrada anteriormente na seção 5.2. Sendo assim, os extensômetros *s1*, *s2* e *s3* foram aplicados nas armaduras principais e os extensômetros *s4*, *s5* e *s6*, nas armaduras secundárias, conforme Figura 7.3.

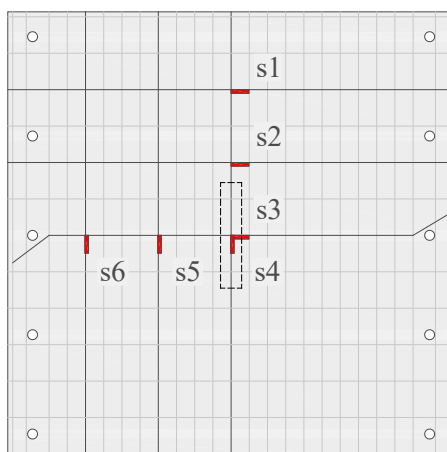


Figura 7.3 – Posição dos extensômetros instalados nas armaduras

O critério próprio adotado para a mudança de regime do estado elástico para o plástico das peças foi qualitativo e quantitativo, com base em pesquisas como as de Michel (2007), Hirma (2017), Rugarli (2018) e Popov (2021), que consideram o nível de deformação e a quantidade de barras que ultrapassaram a deformação de escoamento dentro do arranjo de cada armadura (em cada direção), conforme aplicado também por diversos autores nacionais como Ferreira (2010), Lima Neto (2012) e Albuquerque (2014).

Na Figura 7.4, conforme segue, é detalhada a classificação própria adotada para os modos de ruptura por punção (frágil), flexo-punção (frágil) e flexão (dúctil), adaptada de pesquisadores como Menetrey (1998), Stein (2007) e Oliveira (2003).

Ainda na Figura 7.4, fica estabelecido para esta pesquisa que a ruptura por *punção* pode ocorrer com o escoamento das barras internas ao cone de punção, devido à alta rotação dos segmentos de laje provocada pela formação do tronco de cone (SHEHATA, 1985), distante $2d$ da face externa do pilar de acordo com o previsto pelo EC 2 (2004) e NBR 6118 (2014). A ruptura por *flexão* ocorre com o escoamento de todas as barras e, por *flexo-punção* nos casos intermediários, afirmada também pelo histórico de deslocamentos verticais das peças.

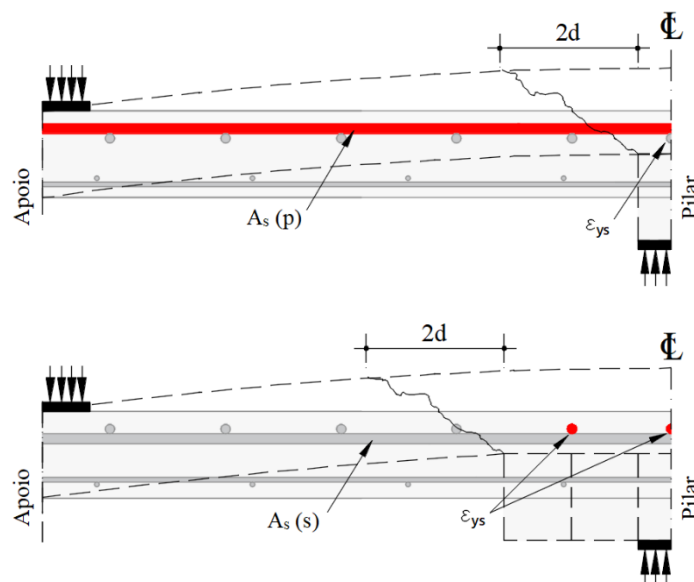


Figura 7.4 – Critério de ruptura adotado com armaduras: $A_s(p)$ – direção principal; $A_s(s)$ – direção secundária)

Destaca-se que as lajes L1A, L2A e L3A (grupo A) não entraram em regime de plasticidade, pois conforme o critério demonstrado anteriormente (Figura 7,4), somente uma barra central cada direção entrou em processo de escoamento previamente à ruína da peça, caracterizando a ruptura por punção de todo o grupo. Houve ganho de resistência à punção devido ao aumento da taxa de armadura secundária, conforme se observa da Figura 7.5 à Figura 7.7.

No grupo B, as lajes L1B e L2B não entraram em regime de plasticidade (ruptura por punção), enquanto a L3B (Figura 7.10) ultrapassou a deformação de escoamento percebida em mais de uma barra de cada direção (ruptura por flexo-punção). Deve-se destacar que, neste grupo, houve aumento de resistência e mudança significativa no comportamento das lajes, devido ao aumento da taxa de armadura secundária.

Em razão das elevadas deformações na região tracionada, houve maior propagação da fissuração; assim, já no grupo C, a laje L1C (Figura 7.11) apresentou deformação de escoamento em mais de uma linha de armadura (com escoamento inclusive da armadura secundária); logo, rompeu por flexo-punção, enquanto as duas últimas lajes, L2C e L3C, entraram em regime total de plasticidade com todas as armaduras em escoamento e comportamento mais dúctil, mostrando a ruptura por flexão. Destaca-se que houve, novamente, aumento de resistência e mudança no comportamento das lajes do grupo. A seguir, são apresentadas graficamente as deformações das armaduras (S) obtidas a partir da monitoração de cada uma das lajes, conforme pode-se perceber da Figura 7.5 à Figura 7.13.

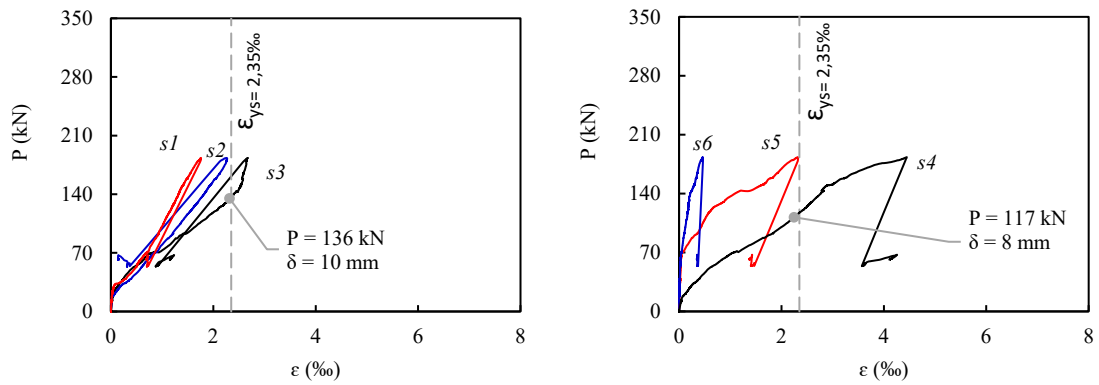


Figura 7.5 – Laje L1A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

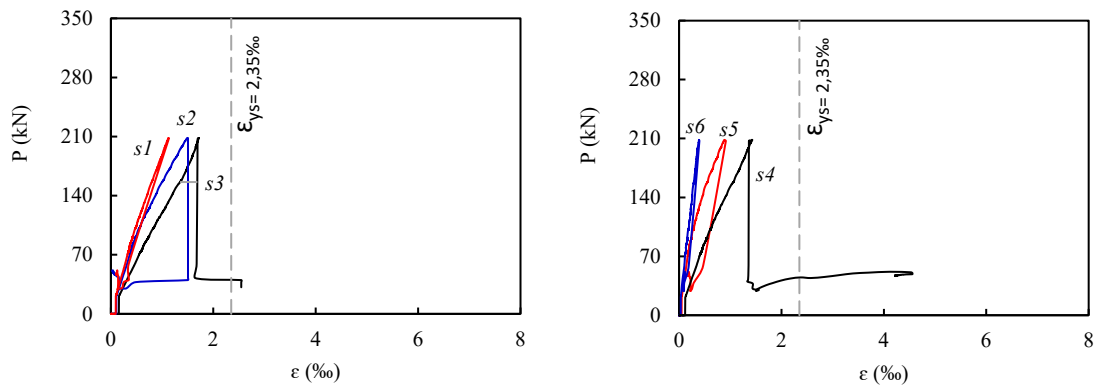


Figura 7.6 – Laje L2A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

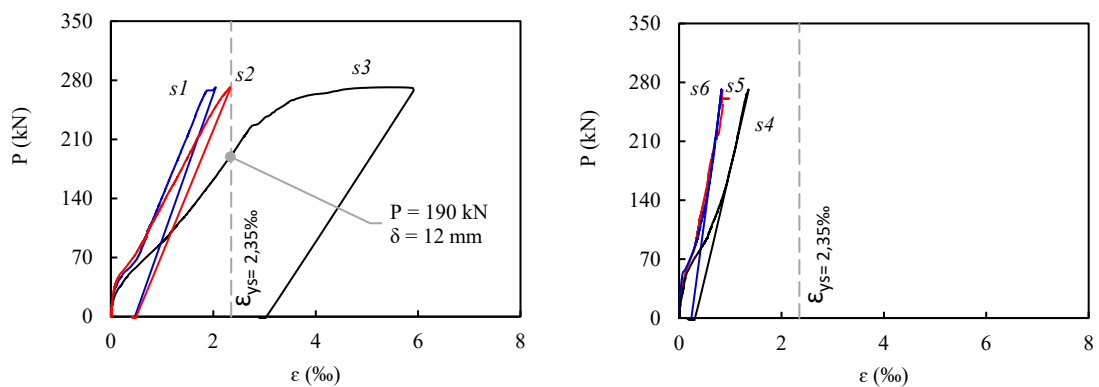


Figura 7.7 – Laje L3A - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

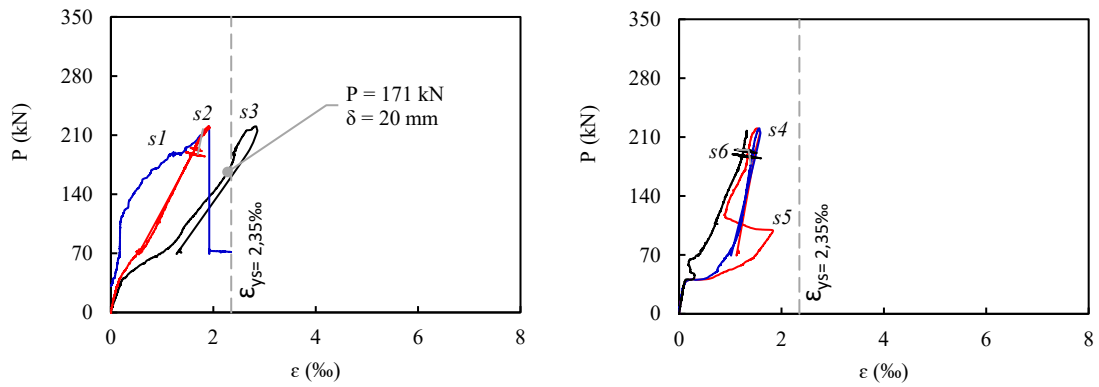


Figura 7.8 – Laje L1B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

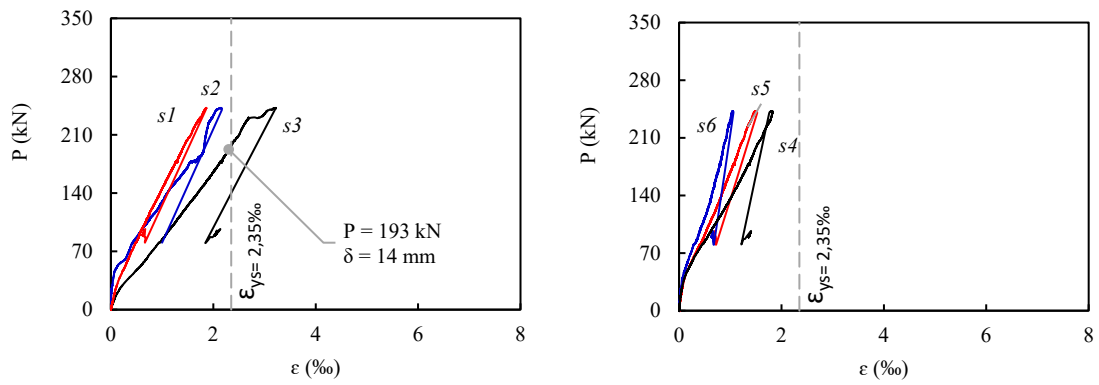


Figura 7.9 – Laje L2B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

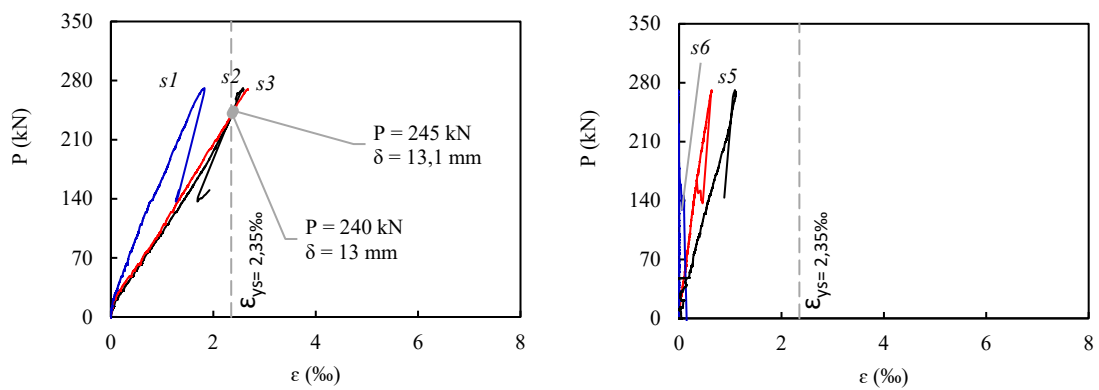


Figura 7.10 – Laje L3B - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

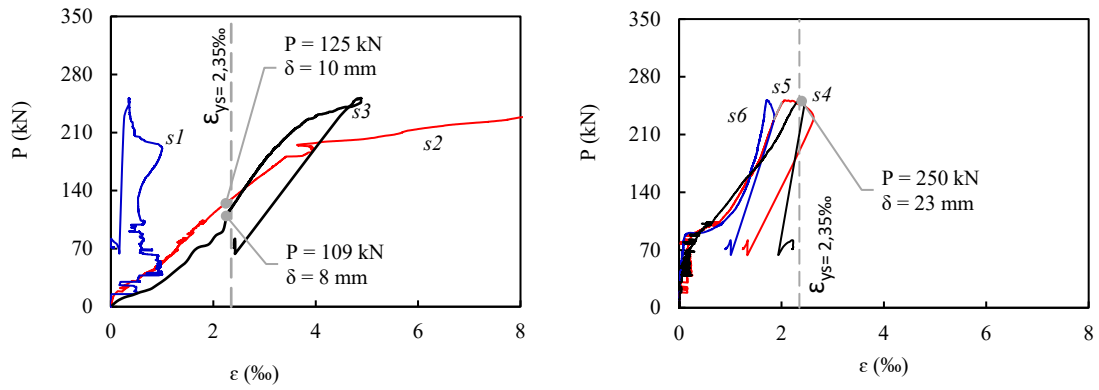


Figura 7.11 – Laje L1C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

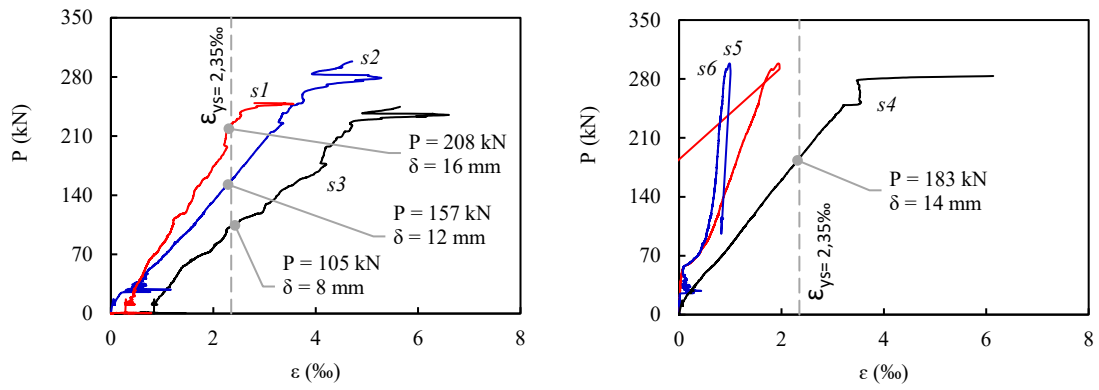


Figura 7.12 – Laje L2C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

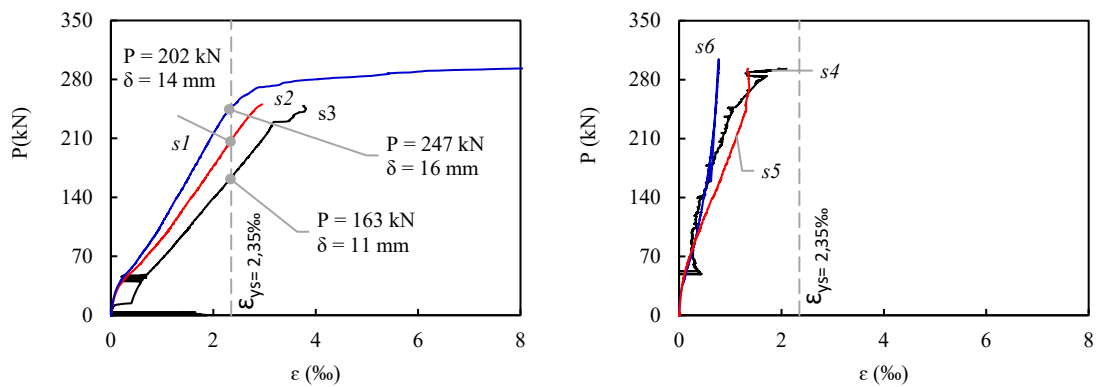


Figura 7.13 – Laje L3C - deformações das armaduras principais (x) e secundárias (y)

7.2.2. DEFORMAÇÕES DE COMPRESSÃO

Segundo [Scott e Gill \(1987\)](#), as deformações de superfícies de concreto armado em grandes peças ensaiadas em laboratório, são geralmente monitoradas usando extensômetros de resistência elétrica. De acordo com [Mckillen et al. \(1967\)](#), estes devem apresentar uma capacidade de adesão e medição de até 10 ‰, o que garante, de forma adequada, o monitoramento do material frágil, como apresentado também por [Roesler e Barengerg \(1999\)](#).

Desta maneira, os dados de deformações foram obtidos por meio do uso de *strain gauges* instalados sobre a superfície de concreto na região central de momento fletor máximo, assim como feito também por [Cornelissen e Reinhardt \(1984\)](#). Esta foi monitorada nas direções “x” e “y” para verificação do comportamento unidirecional dos experimentos. Isto possibilitou a verificação dos espécimes que ultrapassaram a deformação de esmagamento ($\epsilon_c = 3,5 ‰$), conforme prescreve a [NBR 6118 \(2014\)](#) para elementos estruturais sujeitos à flexão simples.

A locação dos extensômetros seguiu aquela mostrada anteriormente na seção 5.2. Sendo assim, os extensômetros *c1* foram instalados na direção principal (*x*) e *c2* na direção secundária (*y*), conforme Figura 7.14. Destaca-se que, não foi verificado o esmagamento do concreto em nenhuma das lajes ensaiadas, em consonância com as ilustrações das Figuras 7.15 a 7.23.

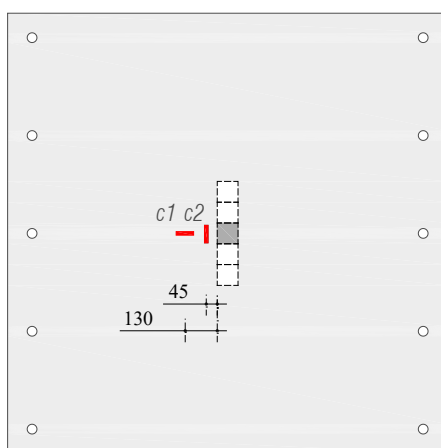


Figura 7.14 – Posição dos extensômetros instalados no concreto

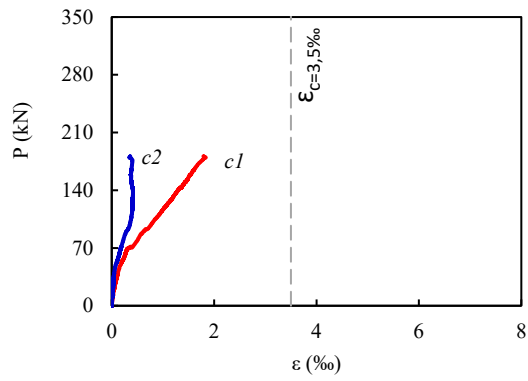


Figura 7.15 – Laje L1A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

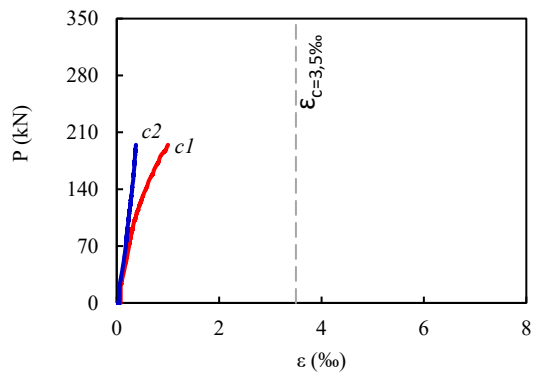


Figura 7.16 – Laje L2A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

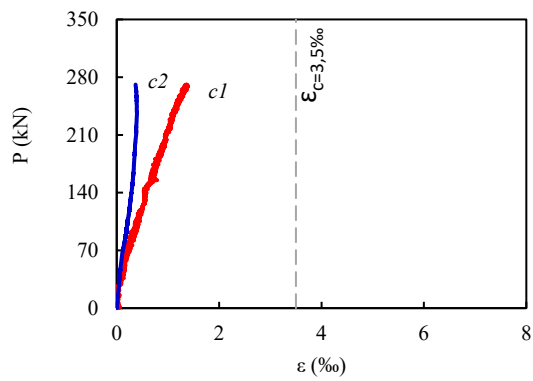


Figura 7.17 – Laje L3A - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

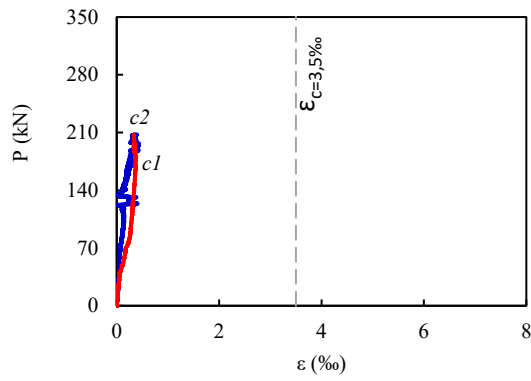


Figura 7.18 – Laje L1B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

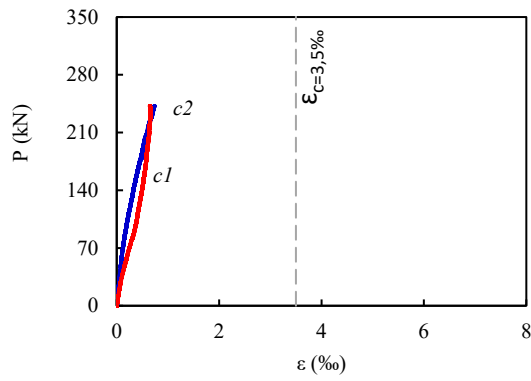


Figura 7.19 – Laje L2B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

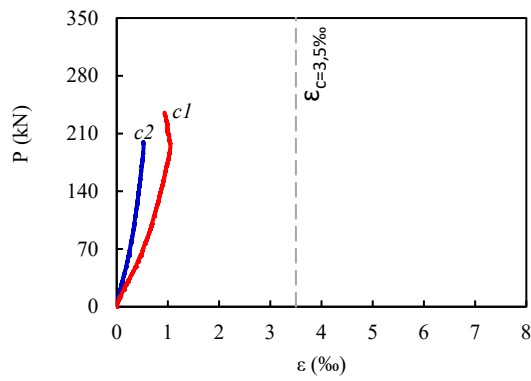


Figura 7.20 – Laje L3B - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

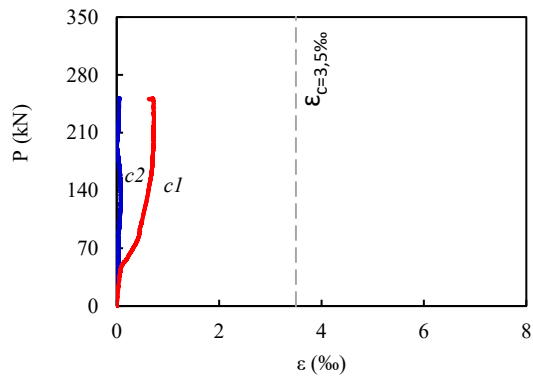


Figura 7.21 – Laje L1C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

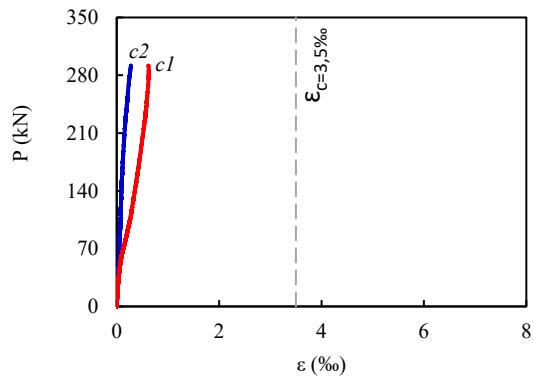


Figura 7.22 – Laje L2C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

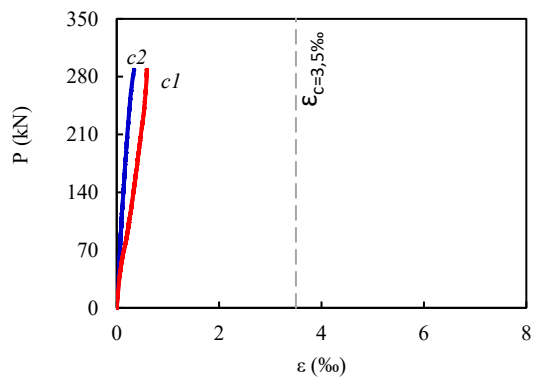


Figura 7.23 – Laje L3C - deformações do concreto nas direções principal (x) e secundária (y)

7.3. Deslocamentos verticais

Todos os espécimes ensaiados apresentaram flechas satisfatórias e seus resultados foram registrados até o momento da ruína total. De modo geral, foi observado que, após formado o tronco de cone de puncionamento, há pertinácia de deslocamento vertical e queda brusca do carregamento (ruptura frágil), independentemente do nível de deformação das armaduras, como percebido também em trabalhos como os de [Mirzaei e Muttoni \(2008\)](#), [Melo e Regan \(1998\)](#) e ainda [Mcpeake \(1980\)](#). A partir de então, o carregamento se estabiliza e o deslocamento vertical cresce aceleradamente; as barras de armadura de tração tendem a ser expulsas do concreto devido a uma combinação de falha de ancoragem e rotação da laje, haja vista que não são armaduras ativas, como as de [Ramos e Lucio \(2008\)](#).

A Figura 7.24 mostra o posicionamento dos transdutores de deslocamento utilizados durante os testes, de tal forma que foi possível adquirir os deslocamentos verticais próximos do apoio (*D1*), máximos no centro da laje (*D2*) e na borda da laje (*D3*), também conforme mostra em corte a Figura 7.25.

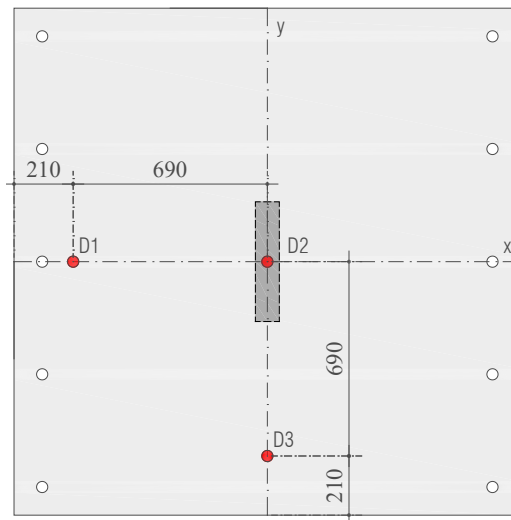


Figura 7.24 – Posição dos transdutores em planta

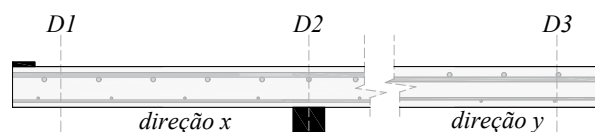


Figura 7.25 – Posição dos transdutores em corte

Observou-se o aumento significativo na resistência ao puncionamento (P_u) das lajes devido à elevação da taxa de armadura secundária (ρ_y). Na série de lajes de pilar tipo A índice 1 (85×85 mm), o ganho ultrapassou os 47%, ou 88 kN, na laje L3A em relação à laje L1A. Expõe-se também o modo de ruptura brusco que caracteriza a ruptura frágil por punção, concordante com os gráficos carga (P) versus deslocamento (δ) mostrados da Figura 7.26 à Figura 7.28.

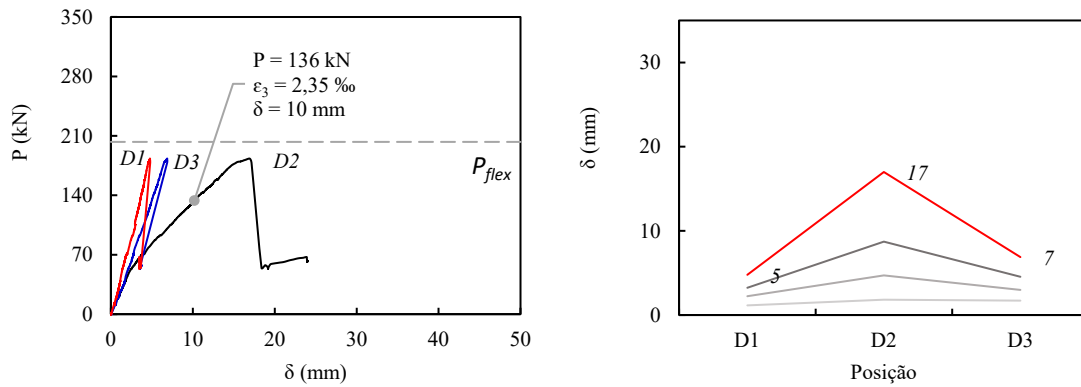


Figura 7.26 – Deslocamentos da laje L1A

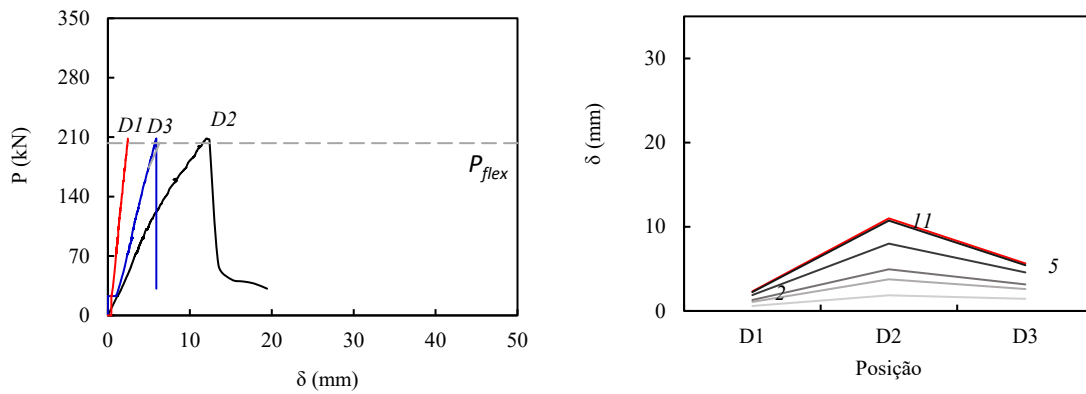


Figura 7.27 – Deslocamentos da laje L2A

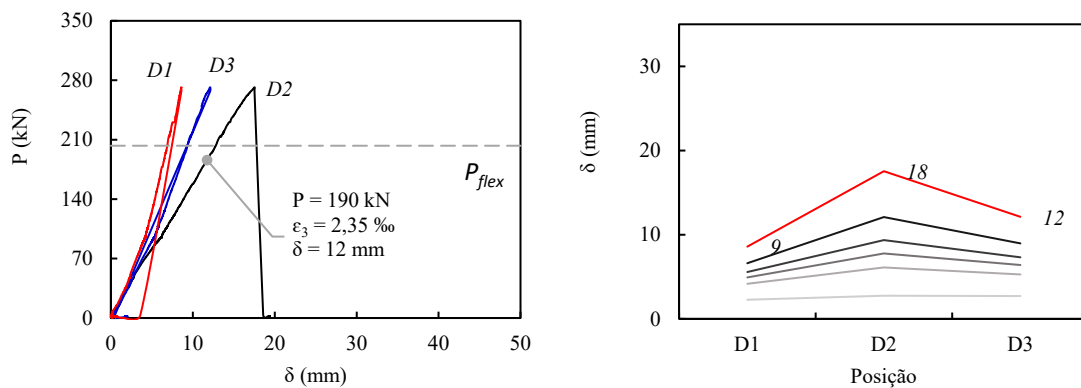


Figura 7.28 – Deslocamentos da laje L3A

Para a série de lajes de pilar tipo B índice 3 (85×255 mm), novamente constatou-se o ganho de resistência, neste caso de 10% ou 22 kN da laje L1B para L2B, e mais 23% ou 51 kN para a L3B. Todas as lajes da série apresentaram escoamento de pelo menos uma barra de armadura de flexão, com mudança de comportamento, destacando-se a laje L3B, a qual passou a romper por flexo-punção, segundo o critério de ruptura adotado na seção 7.2.1 e conforme apresentado da Figura 7.29 à Figura 7.31.

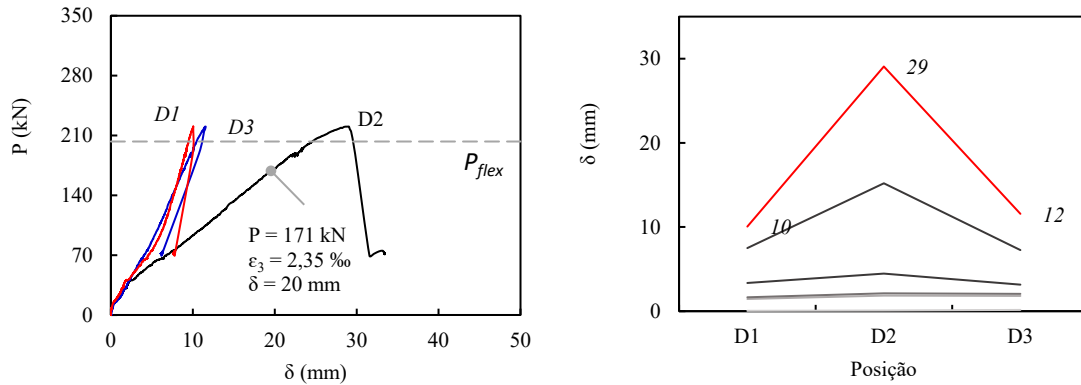


Figura 7.29 – Deslocamentos da laje L1B

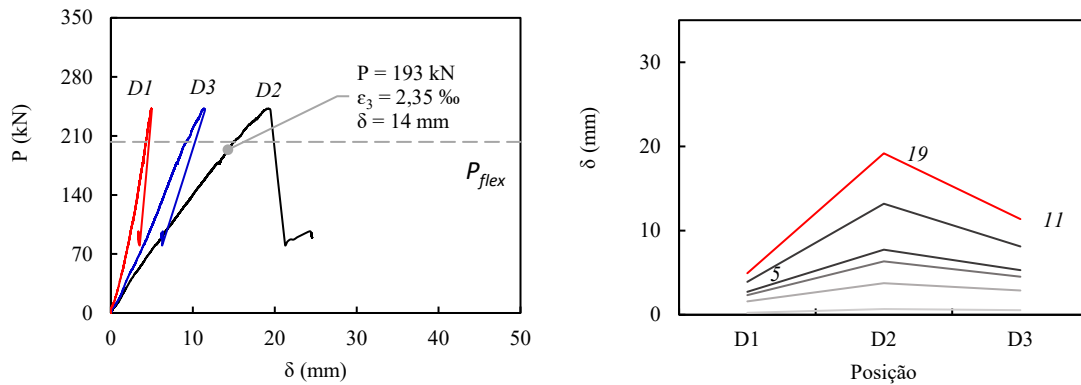


Figura 7.30 – Deslocamentos da laje L2B

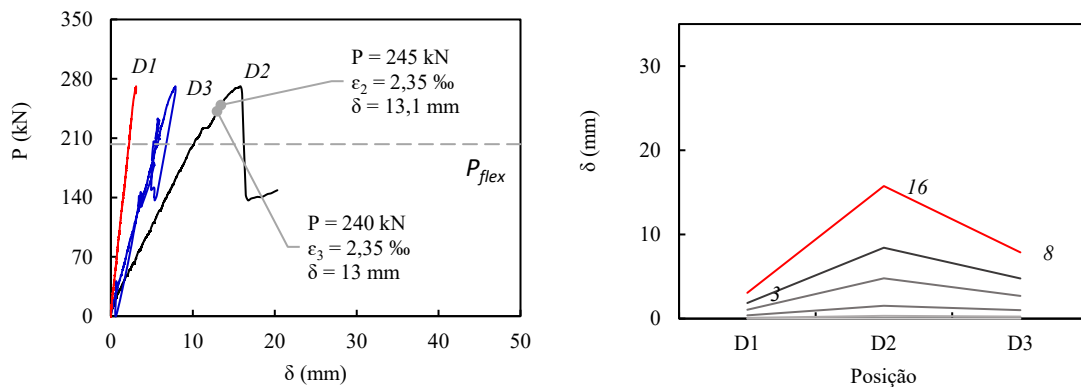


Figura 7.31 – Deslocamentos da laje L3B

Na última série (C) de lajes, de pilares de índice 5 (85×425 mm), houve mudança de comportamento de flexo-punção para flexão, observado claramente nos gráficos carga (P) versus deslocamento (δ). A laje L1C apresentou escoamento até a segunda barra monitorada (s2), enquanto que L2C e L3C apresentaram escoamento de toda a armadura de flexão. Ainda assim, aconteceu o ganho de resistência, porém em menor proporção, acima de 20% ou 52 kN na laje L1C comparada à laje L3C, conforme mostrado da Figura 7.32 à Figura 7.34.

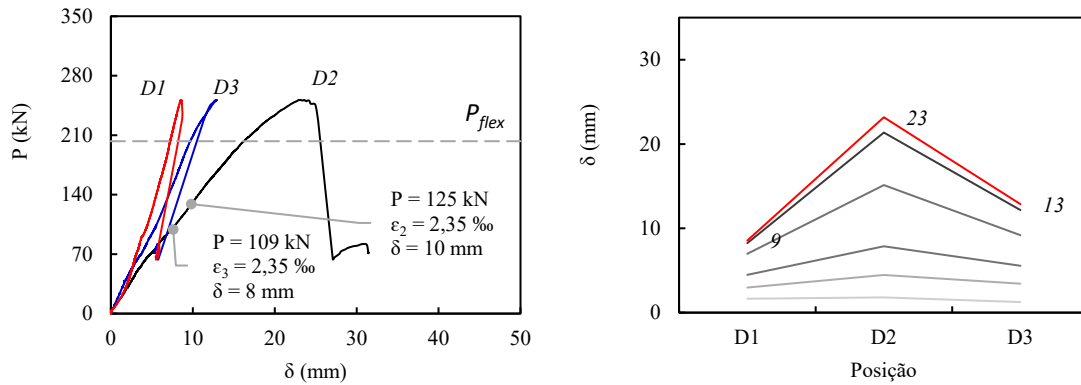


Figura 7.32 – Deslocamentos da laje L1C

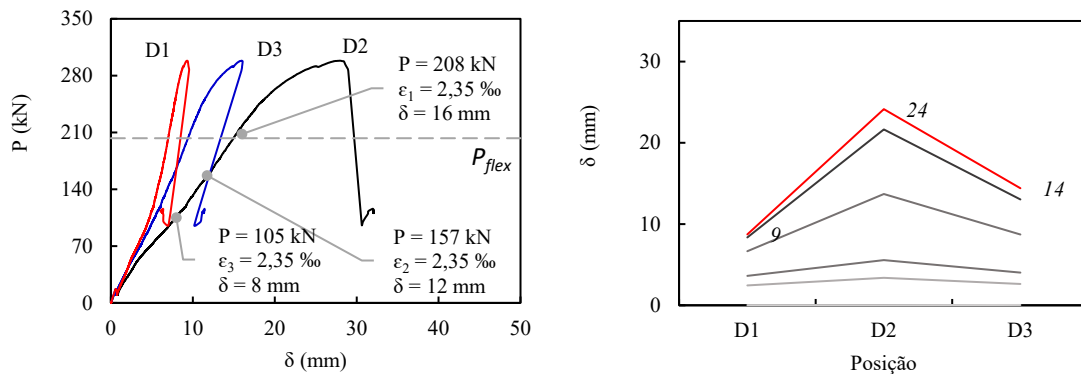


Figura 7.33 – Deslocamentos da laje L2C

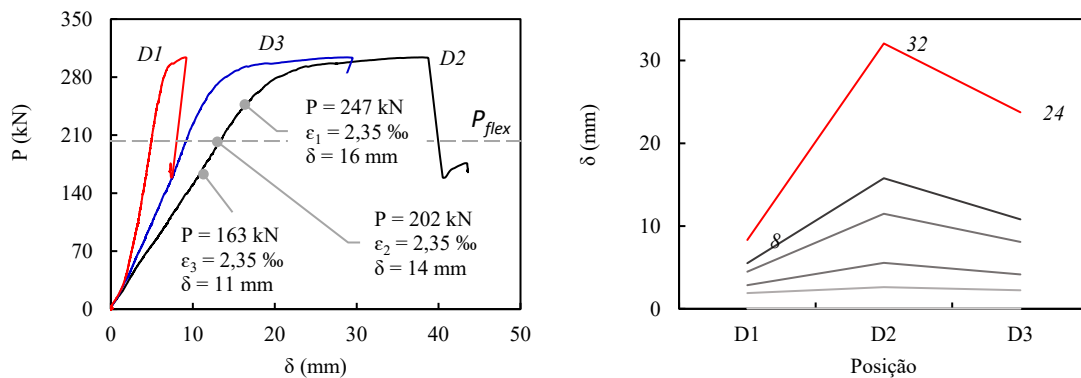


Figura 7.34 – Deslocamentos da laje L3C

A partir de tais resultados apresentados, é possível visualizar em maior profundidade a influência da taxa de armadura secundária. Para a obtenção da resposta da peça frente ao escoamento das armaduras, um método muito utilizado é aproximar o comportamento linear-elástico a uma única rigidez efetiva (K_{ef}) (ZHOU, 2021), calculada para cada uma das lajes conforme a Equação 7.1. Tal conceito também foi utilizado por Huang (2000), Zhou (2017) e Talaeitaba (2021).

$$K_{ef} = \frac{P_y}{\Delta_y} \quad \text{Equação 7.1}$$

Em que:

- P_y – carga no instante do último escoamento da armadura (kN);
- Δ_y – deslocamento no instante do último escoamento da armadura (mm).

O gráfico a seguir (Figura 7.35) apresenta a variação de rigidez efetiva das lajes em séries agrupadas por tipo de pilar (A, B e C) e divididas por taxa de armadura ($\rho_y = 0,59\%$, $1,09\%$ e $2,1\%$) e mostra a influência da última. Fica explícito o ganho de rigidez devido ao aumento da taxa de armadura secundária. Por exemplo, a comparação entre os espécimes (pilar do grupo B) indica que a elevação de rigidez pode ultrapassar os 100% ao se aplicar o dobro de armadura de flexão na direção secundária em lajes unidirecionais apoiadas sobre pilares de índice de retangularidade 3.

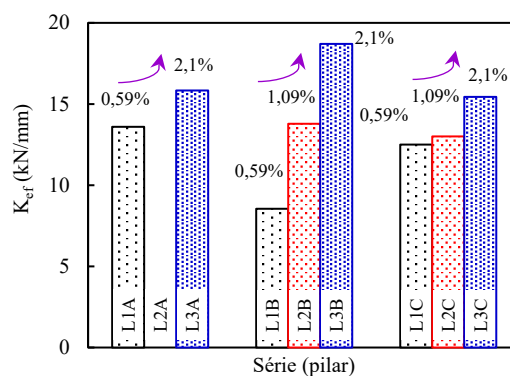


Figura 7.35 – Rigidez efetiva das lajes (taxa de armadura em %)

A ductilidade de uma estrutura pode ser definida como a habilidade do elemento em exibir deformações plásticas significativas sem que sofra a perda relevante de carga para tal (JANG e KANG, 2019). Este é um importante índice para análises sísmicas (BU e POLAK, 2009). Em geral, o coeficiente de ductilidade (μ) pode ser usado para avaliar a performance da estrutura, conforme a Equação 7.2.

$$\mu = \frac{\Delta_u}{\Delta_y} \quad \text{Equação 7.2}$$

Em que:

- Δ_u – deslocamento no instante do carregamento último (mm);
- Δ_y – deslocamento no instante do último escoamento da armadura (mm).

A Figura 7.36 mostra o comportamento do índice de ductilidade das lajes agrupadas em séries por tipo de pilar (A, B e C) e divididas por taxa de armadura ($\rho_y = 0,59\%$, $1,09\%$ e $2,1\%$). Não houve variação significativa de ductilidade frente ao acréscimo de armadura de flexão secundária, porém índices que se apresentam acima de 2,0 mostram a boa ductilidade das estruturas (GILBERT e SAKKA, 2010), o que corrobora com os modos e cargas de ruptura observados durante os ensaios, já que as lajes da série C (pilares 85×425 mm) demonstraram predominância de comportamento de ruptura por flexão.

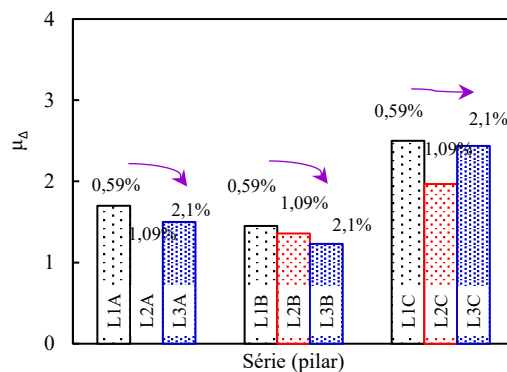


Figura 7.36 – Índice de ductilidade

7.4. Mapas de fissuração

Uma desvantagem dos compósitos de cimento hidráulico é o comportamento frágil, já que a degradação sob carregamento estático ocorre em deformações totais relativamente baixas (1 ~ 5 %) (SZELAG, 2020). A liberação repentina da energia elástica leva à resistência à tração da matriz cimentícia a ser excedida, resultando na formação de fissuração (HLOBIL, SMILAUER e CHANVILLARD, 2016). Através da intersecção e conexão entre si, as fissuras formam uma rede na superfície do material, a qual é denominada como padrão de fissuração (mapa de fissuração) (BISSCHOP e WITTEL, 2011).

A performance de elementos de concreto armado é comumente monitorada através de inspeção visual, considerando-se o comprimento, a abertura e a orientação das fissuras (DAVIS *et al.*, 2002). Fissuras são um dos melhores indicadores da degradação do concreto, pois reduzem a rigidez local, causam descontinuidades no material e, além disso, encurtam a integridade e vida útil da estrutura (LIU, 2020). Tipicamente, essas informações são aplicadas a outros parâmetros de condições estruturais para categorizar o tipo de dano sofrido pelo elemento (ATHANASIOU *et al.*, 2019).

Na manutenção de construções, a presença de fissuras é um dos indicadores mais comuns e essenciais no diagnóstico das condições estruturais (HOANG, 2018). A verificação precoce de fissuras através de métodos eficientes pode prevenir o possível dano ou colapso do elemento estrutural (LIU e YEOH, 2020).

A inspeção visual, apesar de trabalhosa, pode detectar fissuras superficiais com precisão (CHENG *et al.*, 1999). É, assim, um método altamente utilizado para mapeamento de danos de lajes lisas de concreto armado testadas em laboratório. No entanto, segundo Gupta (2021), fissuras internas encontradas em pavimentos rígidos e obras subterrâneas não podem ser detectadas por meio de métodos tradicionais.

Os mapas de fissuração exibidos a seguir foram obtidos por meio de inspeção visual, monitorando-se encaminhamento e nível de carregamento das fissuras das lajes durante os ensaios. Destaca-se o padrão de fissuração predominante de ruptura por flexão nas lajes L3B e L3C (Figura 7.42 e Figura 7.45), que apresenta, por sua vez, a formação do tronco de cone de punção, bem como o encaminhamento de fissuras paralelas ao $c_{máx}$ até próximo das bordas das lajes.

As lajes da série A apresentaram mapas de fissuração com ruptura preeminente por punção, com fissuras tangenciais (Figura 7.37 e Figura 7.39) e prolongamento de fissuras radiais antes da proximidade das bordas, conforme visto na laje L2A (Figura 7.38).

Foi observada, na série B de lajes, a alternância do modo de ruptura de punção para flexão ao passo que as fissuras radiais (na laje L1B e L2B) se tornaram fissuras paralelas (na laje L3B) conforme o aumento da taxa de armadura secundária (ρ_y) de 0,59% (Laje L1B, na Figura 7.40), 1,09% (Laje L2B, na Figura 7.41) e 2,10% (Laje L3B, na Figura 7.42). Esta última apresenta padrão característico de ruptura por flexão, o que corrobora as deformações capturadas nas armaduras.

Por fim, na última série (C), as lajes L1C e L2C demonstram um mapa de fissuração de punção com aumento do tronco de cone frente ao aumento da seção transversal do pilar (Figura 7.43 e Figura 7.44), além de modo de ruptura prevalente com prolongamento de fissuras até as bordas da laje L3C (Figura 7.45). Ocorreu a clara formação das fissuras paralelas típicas de ruptura por flexão em lajes lisas unidirecionais, concordando com a análise feita anteriormente nos itens 7.2 e 7.3.

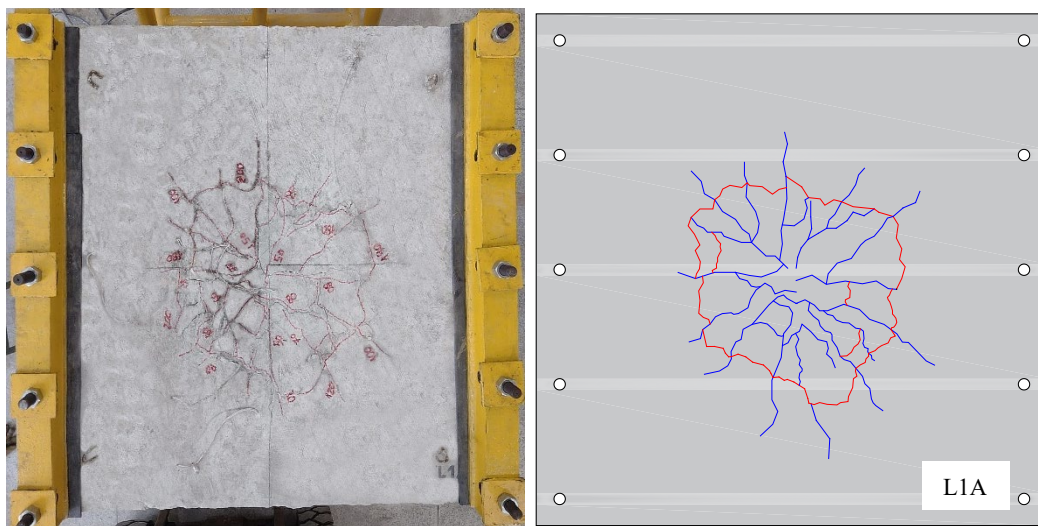


Figura 7.37 – Mapa de fissuração L1A (— tangencial — radial)

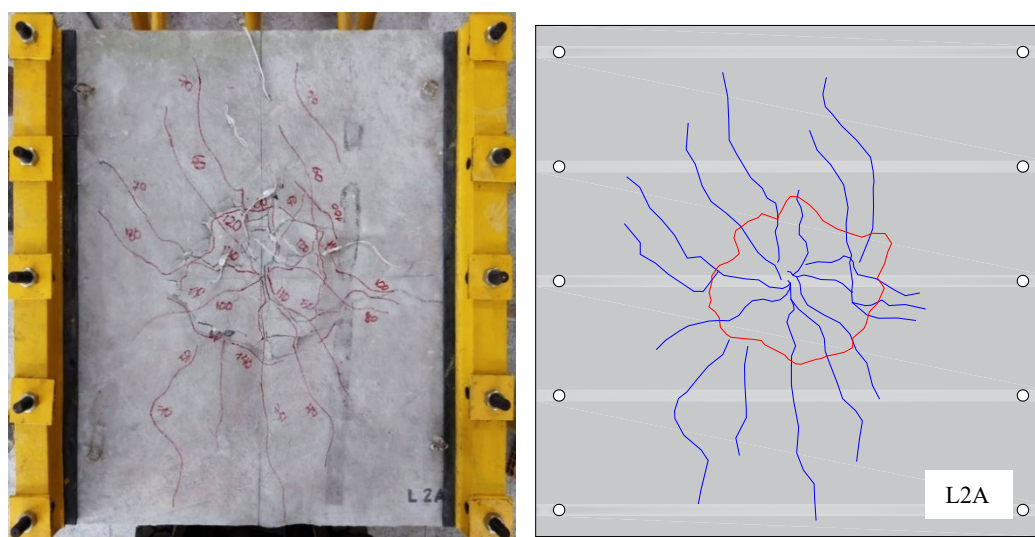


Figura 7.38 – Mapa de fissuração L2A (— tangencial — radial)

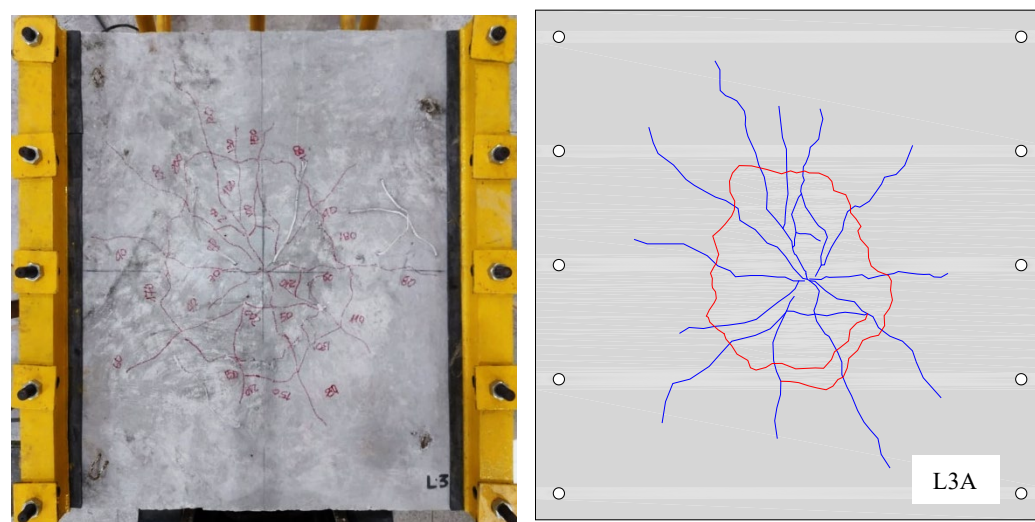


Figura 7.39 – Mapa de fissuração L3A (— tangencial — radial)

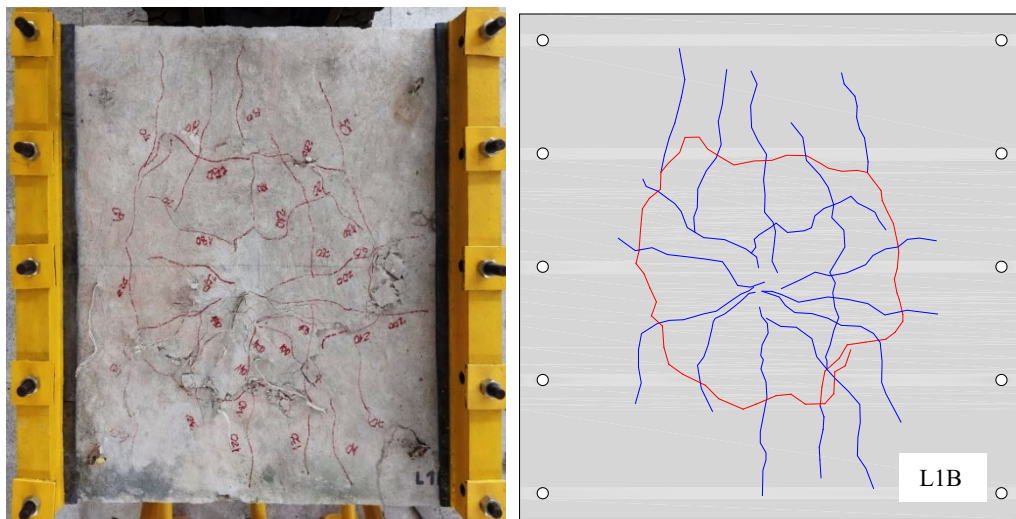


Figura 7.40 – Mapa de fissuração L1B (— tangencial — radial)

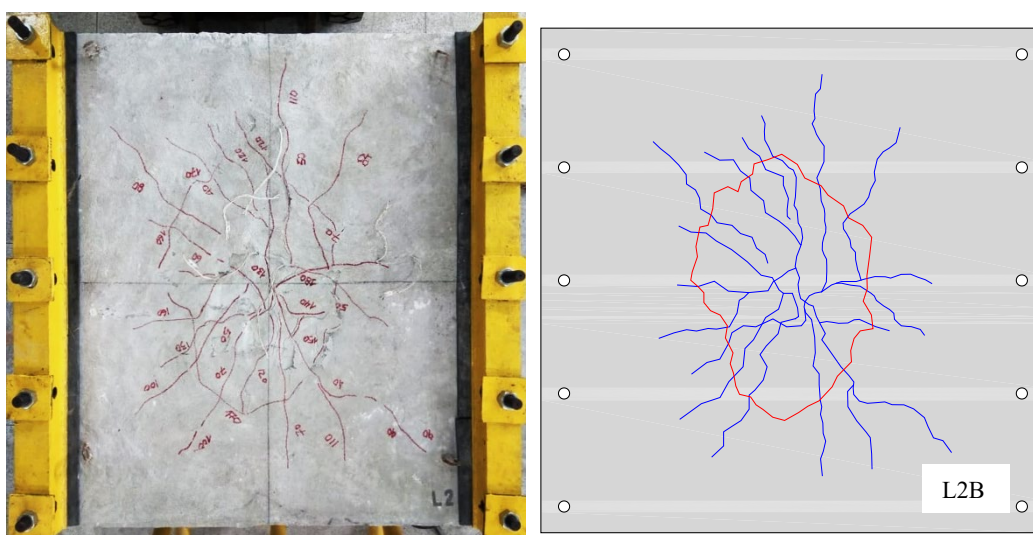


Figura 7.41 – Mapa de fissuração L2B (— tangencial — radial)

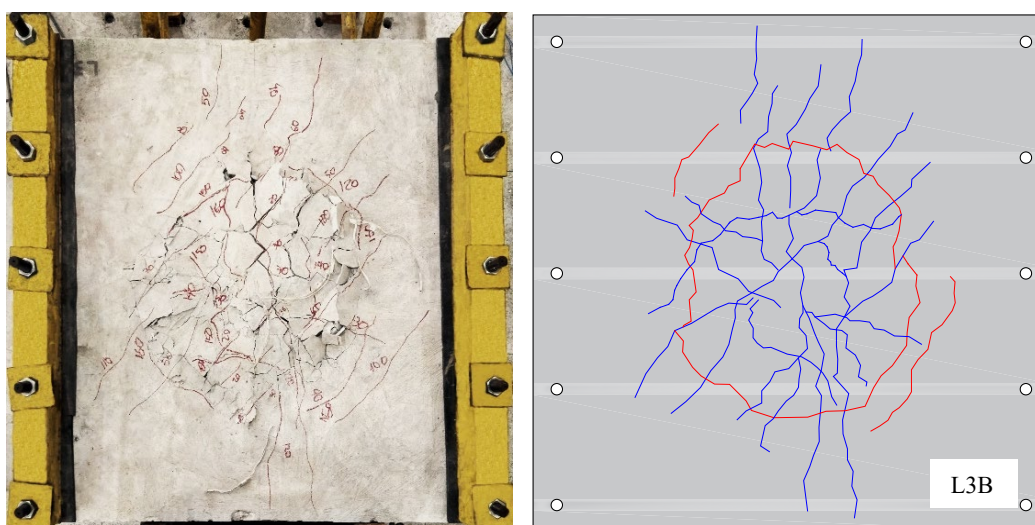


Figura 7.42 – Mapa de fissuração L3B (— tangencial — radial)

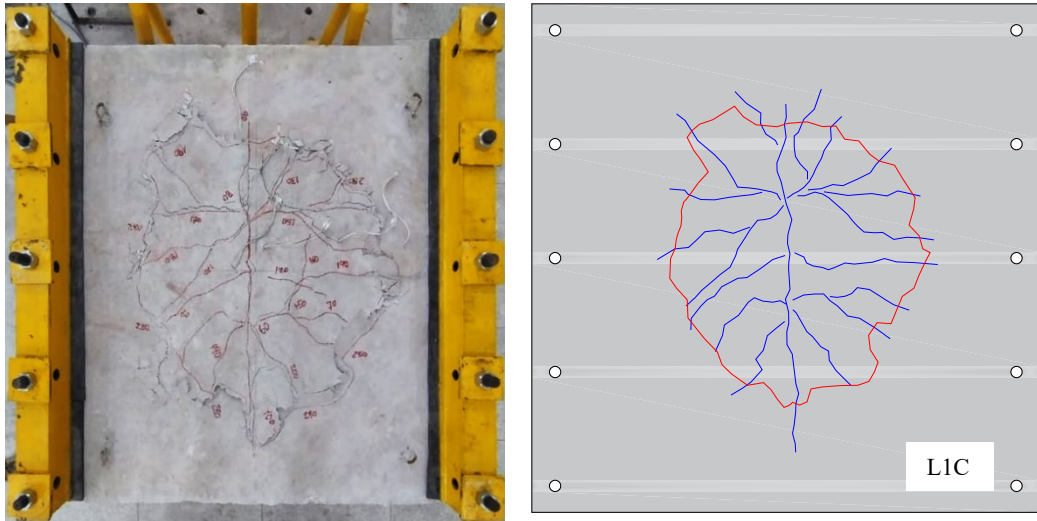


Figura 7.43 – Mapa de fissuração L1C (— tangencial — radial)

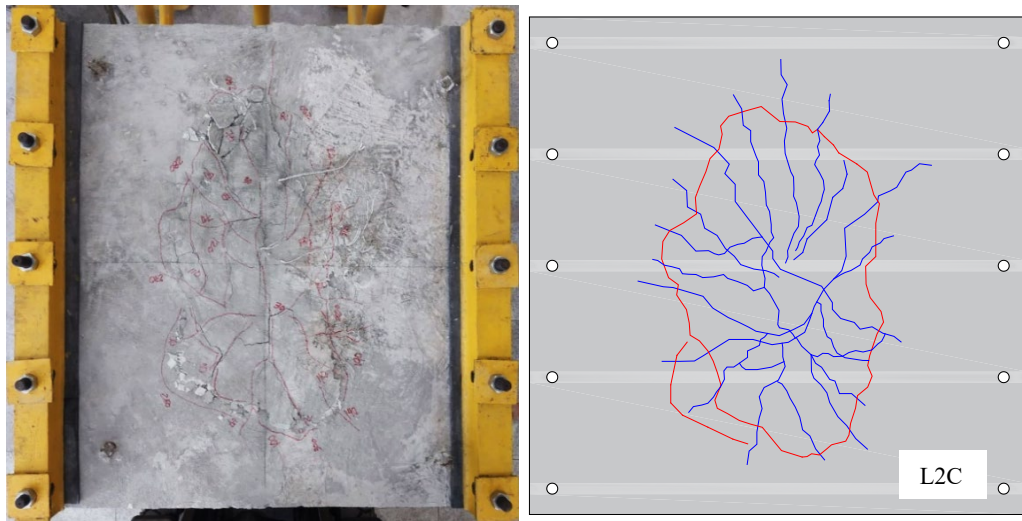


Figura 7.44 – Mapa de fissuração L2C (— tangencial — radial)

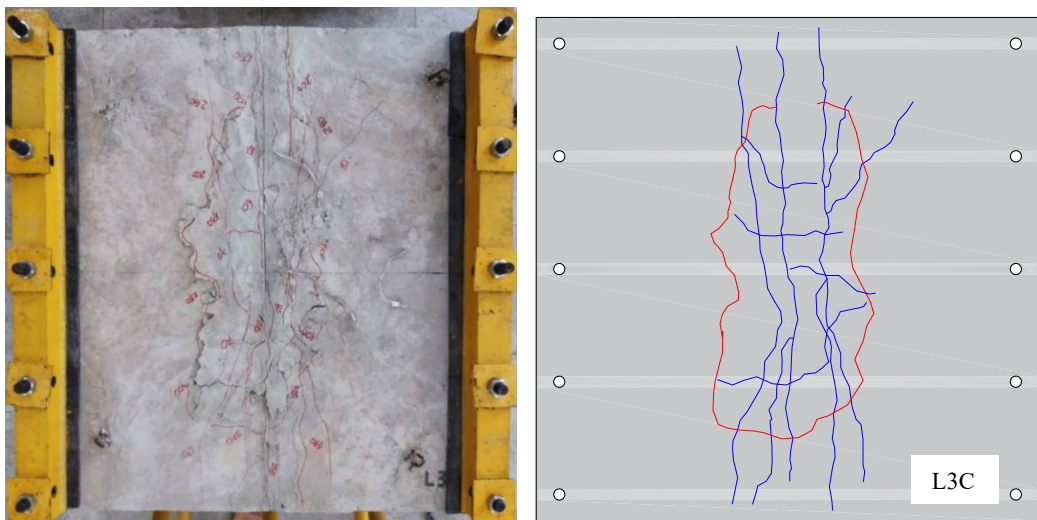


Figura 7.45 – Mapa de fissuração L3C (— tangencial — radial)

7.5. Superfície de ruptura

Para [Palhares \(2018\)](#) e [Ledo \(2016\)](#), é imprescindível realizar o corte (*sawcut*) das lajes para avaliar, com exatidão, a posição e inclinação da superfície de ruptura, bem como a presença de fissuras nos dois planos horizontais entre a armadura de flexão e a de cisalhamento (delaminação). Ou, no caso de lajes sem armadura de cisalhamento, também o efeito pino.

Segundo [Albuquerque \(2014\)](#), o padrão de fissuração mostrado na parte superior das lajes (seção anterior) não representa o real contorno do tronco de cone de puncionamento, mas a borda do cobrimento de concreto que foi expulso devido ao efeito pino que transfere e aumenta esta superfície. Assim, faz-se necessário estabelecer um plano de seccionamento das lajes ao longo de sua extensão que, conforme [Moraes Neto \(2013\)](#), deve evitar que a linha de corte passe pelo eixo de simetria a fim de minimizar a possibilidade de encontro com as barras de armadura longitudinais.

De acordo com [Ferreira \(2010\)](#), o objetivo do seccionamento das lajes é identificar a posição e a inclinação da superfície de ruptura na ligação laje-pilar. Assim como no método empregado pelo autor supracitado, foi cortado apenas um quadrante de cada laje, distante 20 mm dos eixos, o que foi possibilitado pela condição de simetria, conforme apresentado no modelo de corte na Figura 7.46.

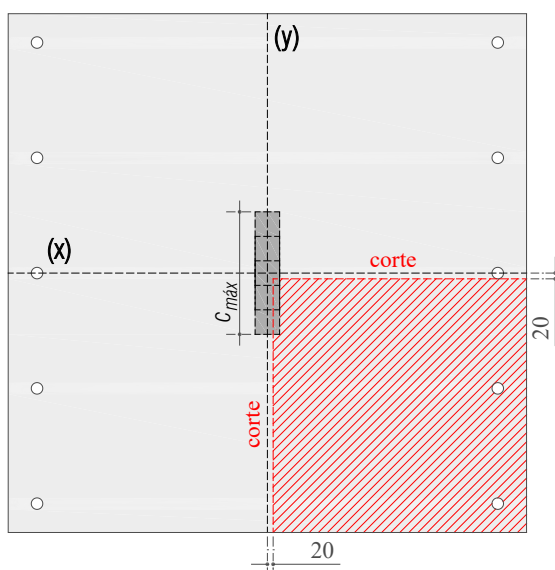


Figura 7.46 – Plano de corte das lajes em destaque hachurado (mm)



a)



b)



c)

Figura 7.47 – Lajes seccionadas: a) tipo A; b) tipo B; c) tipo C

Para [Albuquerque \(2015\)](#), o tronco de cone de punção se forma a partir de uma superfície inclinada que se inicia na face do pilar e sobe até atingir a armadura de flexão (superior) que continua ao longo do cobrimento, conforme pôde ser observado em todas as lajes ensaiadas nesta pesquisa.

Todos os planos de corte realizados são apresentados da Figura 7.48 à Figura 7.53 - à esquerda em fotografia e à direita em desenho esquemático. A partir daí, puderam ser verificados os seguintes dados: distância horizontal do eixo do pilar até o início da fissura crítica na face inferior da laje (d_1), distância horizontal do eixo do pilar até o fim da fissura crítica na face superior da laje (d_2) e ângulo principal de inclinação da fissura crítica (Θ).

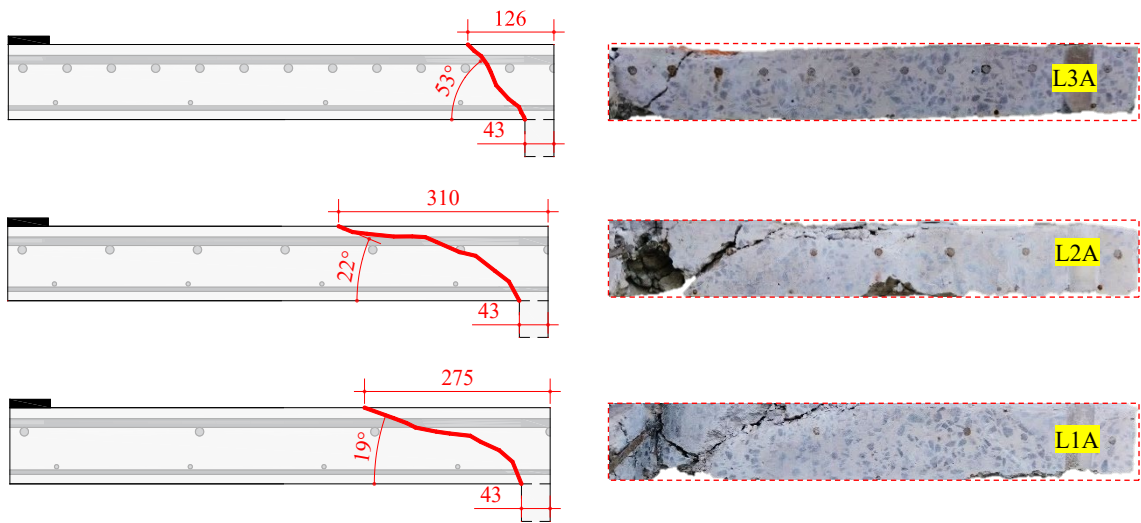


Figura 7.48 – Corte das lajes da série A lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm)

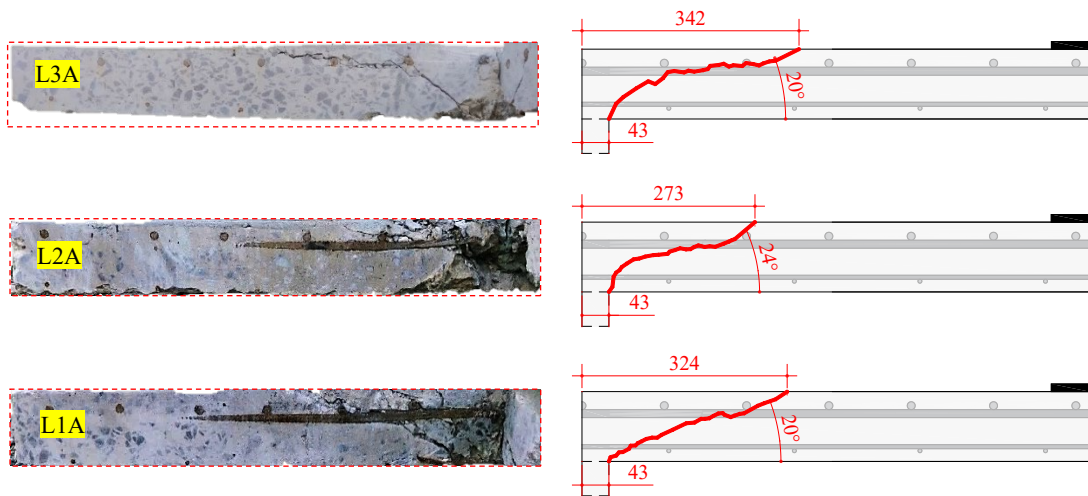


Figura 7.49 – Corte das lajes da série A lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm)

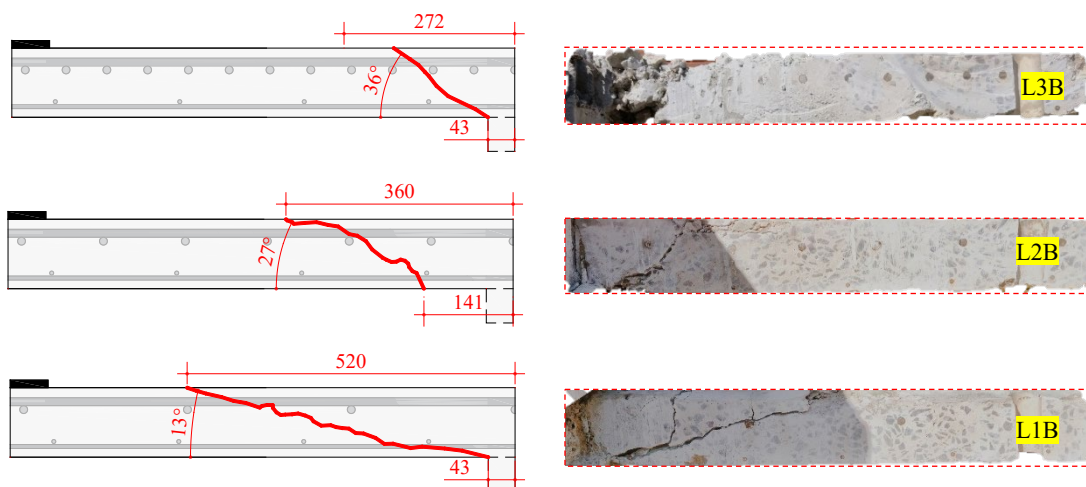


Figura 7.50 – Corte das lajes da série B lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm)

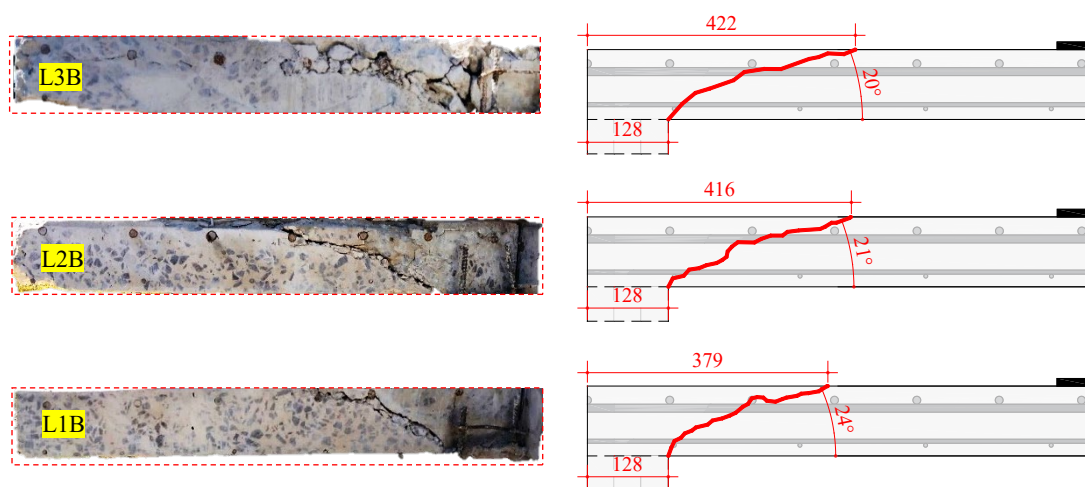


Figura 7.51 – Corte das lajes da série B lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm)

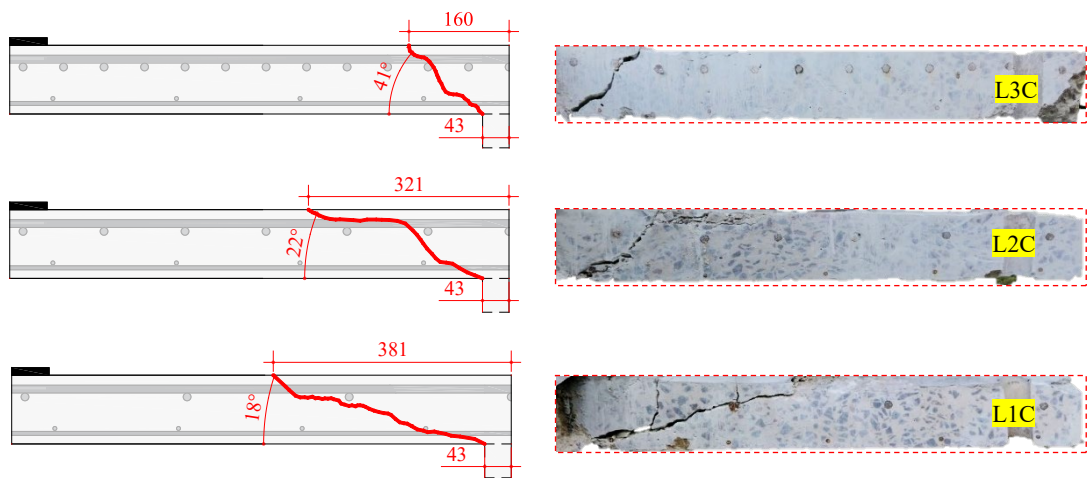


Figura 7.52 – Corte das lajes da série C lado (x) perpendicular ao $c_{máx}$ (mm)

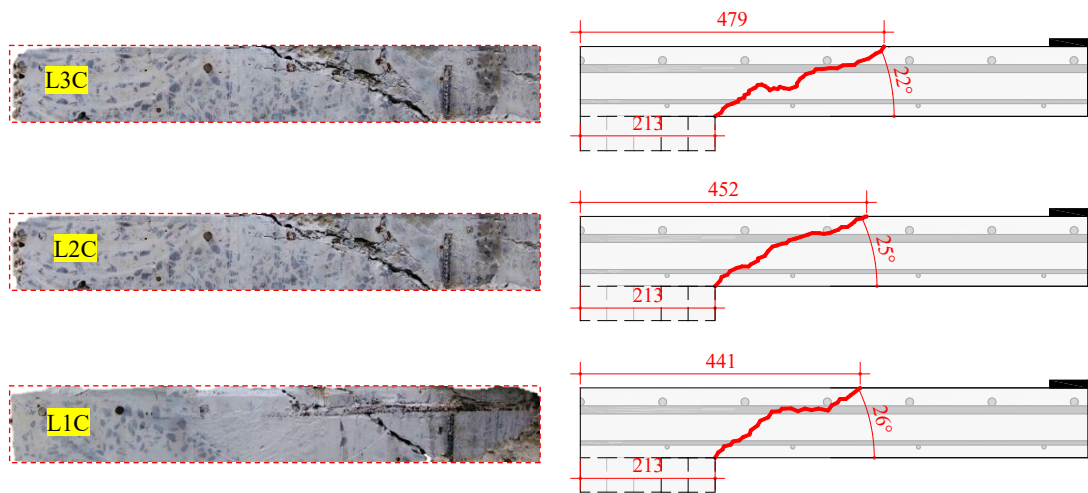


Figura 7.53 – Corte das lajes da série C lado (y) paralelo ao $c_{máx}$ (mm)

A Tabela 7.3 apresenta a síntese do que foi observado após o corte das lajes. Torna-se evidente a influência da armadura secundária no comportamento da fissura crítica, e assim, do tronco de cone de punção. Houve formação do tronco de cone em todas as lajes ensaiadas e não foram observadas mudanças significativas no perímetro crítico e no ângulo da fissura crítica no lado paralelo ao $C_{máx}$.

A análise por grupos a partir de um mesmo tipo de pilar (A, B ou C) revela a forte tendência de comportamento unidirecional nas lajes com maior taxa de armadura secundária (2,1 %), devido à diminuição de rotação da laje provocada pela armadura secundária.

Existe um comportamento coincidente entre as lajes do grupo (1) com taxa de 0,5%, em relação a manter um ângulo de inclinação médio da fissura crítica na direção perpendicular em 16,67°, para o grupo (2) com taxa de 1,09% em 23,67° e para o grupo (3) com taxa de 2,1% em 43,33°, conforme apresentado.

Tabela 7.3 – Síntese do seccionamento das lajes (x)

Lado perpendicular ao $C_{máx}$ (x)								
Laje	d_1 (mm)	d_2 (mm)	\bar{X}_{d2} (mm)	\varnothing_c (°)	\bar{X}_{\varnothing_c} (°)	$+ \varnothing_c$ (°)	Superfície	P_U (kN)
L1A	43,00	275,00		19,00				183,29
L1B	43,00	520,00	392,00	13,00	16,67	0,00		220,40
L1C	43,00	381,00		18,00				251,51
L2A	43,00	310,00		22,00				208,38
L2B	141,00	360,00	330,33	27,00	23,67	7,00	Tronco de cone	242,48
L2C	43,00	321,00		22,00				298,38
L3A	43,00	126,00		53,00				271,69
L3B	43,00	272,00	186,00	36,00	43,33	26,67		271,20
L3C	43,00	160,00		41				303,86

Legenda: d_1 - distância inferior da fissura ao eixo do pilar; d_2 - distância superior da fissura ao eixo do pilar; \bar{X}_{d2} - média aritmética de d_2 ; \varnothing_c - ângulo da fissura; \bar{X}_{\varnothing_c} - média aritmética de \varnothing_c ; $+ \varnothing_c$ - acréscimo de inclinação.

Por sua vez, no lado paralelo observou-se acréscimo nulo de inclinação da fissura crítica e tendência de manutenção do mesmo ângulo de aproximadamente 23° com perímetro médio entre 380,33 mm e 414,33 mm, conforme apresentado na Tabela 7.4.

A maior taxa de armadura secundária aumenta a rigidez na direção considerada e, assim, diminui a rotação da laje. Conforme observado por Damasceno (2007), as inclinações apresentaram a tendência de serem maiores para as lajes com maior taxa de armadura, em decorrência da maior rigidez que contribuiu para que a curvatura das lajes fosse ligeiramente restringida. Já na direção paralela ao $C_{máx}$ (y), houve comportamento semelhante em todas as lajes analisadas experimentalmente: o acréscimo de inclinação foi praticamente nulo, e que a fissura crítica se apresentou entre 20° e 23° médios na direção considerada (Tabela 7.4).

Tabela 7.4 – Síntese do seccionamento das lajes (y)

Lado paralelo ao $C_{máx}$ (y)								
Laje	d_1 (mm)	d_2 (mm)	\bar{X}_{d_2} (mm)	$\bar{\theta}_c$ (°)	$\bar{X}_{\bar{\theta}_c}$ (mm)	$+ \theta_c$ (°)	Superfície	P_U (kN)
L1A	43,00	324,00		20,00				183,29
L1B	128,00	379,00	381,33	24,00	23,33	0,00		220,40
L1C	213,00	441,00		26,00				251,51
L2A	43,00	273,00		24,00			Tronco de cone	208,38
L2B	128,00	416,00	380,33	21,00	23,33	0,00		242,48
L2C	213,00	452,00		25,00				298,38
L3A	43,00	342,00		20,00				271,69
L3B	128,00	422,00	414,33	20,00	20,67	-2,67		271,20
L3C	213,00	479,00		22,00				303,86

Legenda: d_1 - distância inferior da fissura ao eixo do pilar; d_2 - distância superior da fissura ao eixo do pilar; \bar{X}_{d_2} - média aritmética de d_2 ; $\bar{\theta}_c$ - ângulo da fissura; $\bar{X}_{\bar{\theta}_c}$ - média aritmética de $\bar{\theta}_c$; $+ \theta_c$ - acréscimo de inclinação.

7.6. Análise dos resultados experimentais

Sob a ótica dos ensaios realizados, é possível visualizar graficamente o comportamento experimental das cargas últimas por meio da relação entre esta e a carga calculada necessária para início de ruptura por flexão (item 6) das lajes ensaiadas.

Na Figura 7.54, observa-se que a mudança de comportamento e o aumento das cargas últimas já eram esperados devido ao maior índice de retangularidade dos pilares, que tendem a elevar o perímetro de controle, em que para uma mesma taxa de armadura secundária há um aumento nas dimensões dos pilares.

Apesar de cargas (experimentais) maiores que P_{flex} (teórico) serem apresentadas, em poucos casos a totalidade das armaduras alcançou a deformação de escoamento, ficando implícito que esta última representa muito mais uma carga para início de um processo de ruptura dúctil. É imprescindível a análise de parâmetros experimentais (como deformações) de aço e concreto para uma definição exata de um modo de ruptura.

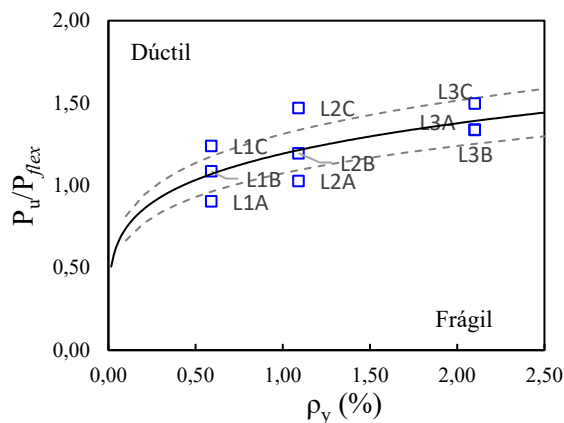


Figura 7.54 – Cargas últimas e armadura secundária (— tendência; - - - tendência $\pm 10\%$)

Entretanto, a partir de um novo ponto de vista, na Figura 7.55, percebe-se a alteração do comportamento mais frágil para um mais dúctil proporcionalmente ao aumento da armadura secundária das lajes, em que para um mesmo índice de retangularidade há um aumento da taxa de armadura correlacionado ao ganho de capacidade de carga. Isto ocorre de forma mais acentuada nas lajes com taxa de $\rho_y = 2,1\%$, o que justifica, assim, a tese aqui proposta, pois alimenta novos bancos de dados (através da Tabela 7.5). Destaca-se que de 9 (nove) lajes

ensaiadas: 5 (cinco) romperam por punção, 2 (duas) romperam por flexo-punção e apenas 2 (duas) romperam por flexão com aumento de capacidade de carga e mudança de modo de ruptura.

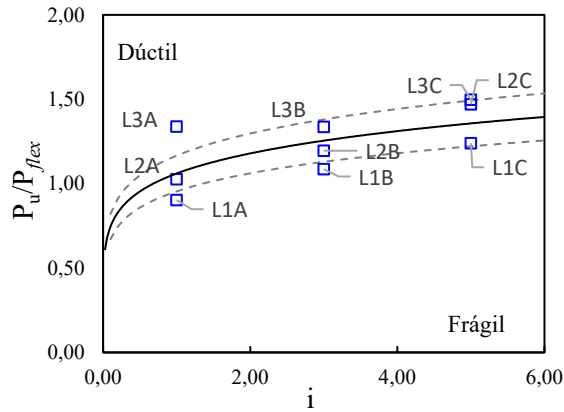


Figura 7.55 – Cargas últimas e índice de retangularidade (— tendência; - - - tendência ± 10%)

Tabela 7.5 – Cargas e modos de ruptura experimentais

Laje	Cargas (kN)						P_u	P_{flex}	P_u/P_{flex}	ϵ_{ys}	Modo
	P_{ACI}	P_{NBR}	P_{EC2}	P_{MC10}	P_{TFCC}	$P_{Oliveira03}$					
L1A	108,80	159,76	127,75	115,28	142,29	172,83	183,29	202,90	0,90	sim (1)	P
L2A	108,80	176,97	141,51	115,28	142,29	191,44	208,38	202,90	1,03	não	P
L3A	108,80	197,41	157,85	115,28	142,29	213,55	271,69	202,90	1,34	sim (1)	P
L1B	135,02	197,09	157,59	178,61	220,47	182,81	220,40	202,90	1,09	sim (1)	P
L2B	135,02	218,32	174,57	178,61	220,47	202,50	242,48	202,90	1,20	sim (1)	P
L3B	135,02	243,53	194,73	178,61	220,47	225,89	271,20	202,90	1,34	sim (2)	FP
L1C	150,67	234,41	187,44	241,95	298,65	202,43	251,51	202,90	1,24	sim (2)	FP
L2C	150,67	259,66	207,63	241,95	298,65	224,23	298,38	202,90	1,47	sim (3)	F
L3C	150,67	289,65	231,61	241,95	298,65	250,13	303,86	202,90	1,50	sim (3)	F

Legenda: ϵ_{ys} sim (1) - escoamento da primeira barra monitorada; sim (2) - escoamento até a segunda barra; sim (3) escoamento de todas as barras; P – Punção; FP – Flexo punção; F – Flexão.

Parametricamente, é possível notar através da Tabela 7.6 que todas as previsões se mostram inadequadas para previsão de carga máxima de lajes lisas unidirecionais com taxa de armadura secundária variável, em que as normas NBR 6118 (2014) e EC 2 (2004) apresentam boa precisão (coeficiente de variação – CV próximo de 10 e coeficiente de determinação – R^2 próximo de 1,0), porém houve baixa acurácia, pois $MAPE$ acima de 10% (erro percentual absoluto médio – $MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i - y_i}{y_i} \right|$).

Tabela 7.6 – Cargas e modos de ruptura relativos à P_u

Laje	P_u/P_{NBR}	P_u/P_{ACI}	P_u/P_{EC2}	P_u/P_{MC10}	P_u/P_{TFCC}	$P_u/P_{Oliveira}$
L1A	1,15	1,68	1,43	1,59	1,29	1,06
L2A	1,18	1,92	1,47	1,81	1,46	1,09
L3A	1,38	2,50	1,72	2,36	1,91	1,27
L1B	1,12	1,63	1,40	1,23	1,00	1,21
L2B	1,11	1,80	1,39	1,36	1,10	1,20
L3B	1,11	2,01	1,39	1,52	1,23	1,20
L1C	1,07	1,67	1,34	1,04	0,84	1,24
L2C	1,15	1,98	1,44	1,23	1,00	1,33
L3C	1,05	2,02	1,31	1,26	1,02	1,21
Média	1,15	1,91	1,43	1,49	1,21	1,20
DP	0,09	0,27	0,12	0,40	0,32	0,08
CV (%)	7,80	13,96	8,27	26,77	26,77	6,98
R^2	0,82	0,43	0,82	0,45	0,45	0,89
MAPE (%)	12,27	46,85	29,85	29,10	16,67	16,39

O comportamento do concreto confinado é diferente do concreto não confinado, pois sob baixas pressões de confinamento o concreto tem um comportamento tipicamente frágil. No entanto, o concreto sob altas pressões tem um comportamento mais dúctil em relação ao anterior (Chen, 1982). Isso foi observado em ensaios de estado triaxial de tensões, conforme ilustra a Figura 8.2.

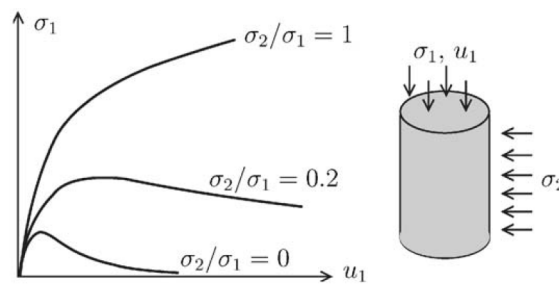


Figura 8.2 – Ensaio de compressão triaxial (MANG *et al.*, 2003)

8.2. Estado de tensão uniaxial dos materiais

8.2.1. COMPRESSÃO

É possível afirmar, a partir de resultados experimentais, que o comportamento do concreto neste estado é altamente não-linear. A curva tensão-deformação do concreto é linear elástica até uma faixa de 30% à 40% de f_c . Após esse intervalo, a curva cresce gradualmente até 75% de f_c . Nesse estágio, deformações ortogonais geram fissuração entre o agregado e a pasta de cimento e, por consequência, diminuição da rigidez do elemento, o que gera comportamento não linear do material. Após o pico de carregamento, a curva começa a decrescer, o que normalmente acontece através de um comportamento *softening* em que o esmagamento acontece no último nível de deformação.

Na ausência de dados experimentais para representação deste fenômeno, pode-se aplicar a equação do Model Code 90 (1991) MC90, que é de larga aceitação no meio técnico-científico. O comportamento é dividido em duas partes: uma que compreende o trecho de deformação $0 < \varepsilon_c \leq 3,5\text{‰}$ (Equação 8.1) e uma correspondente a $\varepsilon_c > 3,5\text{‰}$ (Equação 8.2), conforme ilustrado na Figura 8.3.

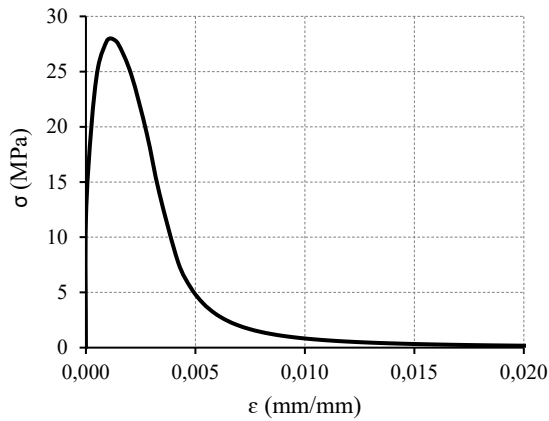


Figura 8.3 – Resposta não linear do concreto à compressão (MODEL CODE 90, 1991)

$$\sigma_c = \left[\frac{A \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{c0}) - (\varepsilon_c / \varepsilon_{c0})^2}{1 + (A - 2) \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{c0})} \right] \cdot f_{cm} \quad \text{Equação 8.1}$$

$$\sigma_c = \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1})} - \frac{2}{(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1})^2} \right] \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^2 + \left[\frac{4}{(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1})} - \varepsilon \right] \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1}) \right\}^{-1} \cdot f_{cm} \quad \text{Equação 8.2}$$

Em que:

$$f_{cm} = f_c + 8 \text{ MPa};$$

ε_{c1} – o valor de 2,2‰;

$\varepsilon_{c,lim}$ – o valor de 3,5‰;

$$\varepsilon_{c0} = \frac{2 \cdot f_{tc}}{E_{sec}}.$$

Com a variável A sendo calculada como:

$$A = \frac{E_{ci} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad \text{ou} \quad A = \frac{E_{ci}}{E_{cs}} \quad \text{Equação 8.3}$$

A partir de:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad \text{Equação 8.4}$$

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad \text{Equação 8.5}$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad \text{Equação 8.6}$$

O módulo de elasticidade secante pode ser tomado a partir da posição do pico máximo de tensão de compressão da curva, conforme a Figura 8.4. É calculado conforme as equações que seguem.

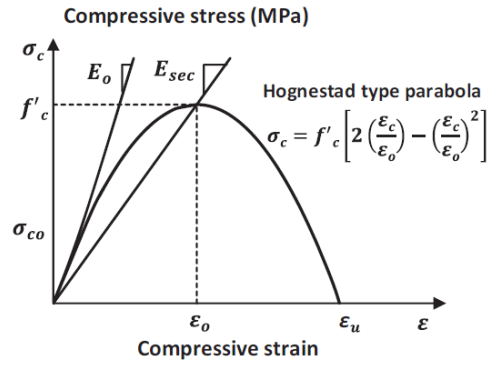


Figura 8.4 – Módulo de elasticidade secante (MODEL CODE 2010, 2011)

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{Equação 8.7}$$

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot \left[\left(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1} \right)^2 \cdot (A - 2) + 2 \cdot \left(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1} \right) - A \right]}{\left[\left(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{c1} \right) \cdot (A - 2) + 1 \right]^2} \quad \text{Equação 8.8}$$

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot A + 1 \right) + \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad \text{Equação 8.9}$$

E por fim, segundo [Alfarah, Lopez-Almansa e Oller \(2017\)](#), as deformações finais são calculadas como:

$$\varepsilon_c^{pl} = b_c \cdot \varepsilon_c^{in} \quad \text{Equação 8.10}$$

$$\varepsilon_c^{in} = \varepsilon_c - \varepsilon_{0c}^{el} \quad \text{Equação 8.11}$$

$$\varepsilon_{0c}^{el} = \frac{\sigma_c}{E_{ci}} \quad \text{Equação 8.12}$$

Em que,

$$b_c = \frac{\varepsilon_c^{pl}}{\varepsilon_c^{in}} \quad \text{ou} \quad b_c = \frac{1,97 \cdot (f_c + 8)}{G_{ch}} \quad \text{Equação 8.13}$$

e

$$G_{ch} = \left(\frac{f_{cm}}{f_{tm}} \right)^2 \cdot G_f \quad \text{Equação 8.14}$$

$$G_f = 0,073 \cdot f_{cm}^{0,18} \quad \text{Equação 8.15}$$

8.2.2. TRAÇÃO

Para a consideração do comportamento do concreto à tração, foi adotada a curva apresentada por [Hordijk \(1992\)](#), que utiliza o critério de abertura da fissura, conforme a equação e a figura abaixo:

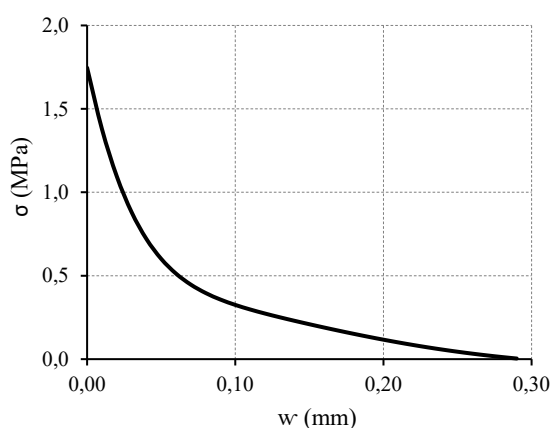


Figura 8.5 – Resposta não linear do concreto à tração (baseado em [HORDIJK, 1992](#))

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left\{ \left[1 + \left(c_1 \cdot \frac{w}{w_c} \right)^3 \right] \exp \left(-c_2 \cdot \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} \cdot (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \right\} \quad \text{Equação 8.16}$$

Em que:

$$f_{ctm} = 0,33 \sqrt{f_{cm}} \quad \text{Equação 8.17}$$

$$w = 0,8 \cdot \frac{G_f}{f'_t} \quad \text{Equação 8.18}$$

$$w_u = 3,6 \cdot \frac{G_f}{f'_t} \quad \text{Equação 8.19}$$

Sendo C1 e C2 respectivamente considerados como 3 e 6,93 para concretos convencionais.

A modelagem matemática do comportamento plástico do aço à tração adotada seguiu a recomendação do MC90 (1991), que apresenta um estado perfeitamente plástico do material em um traçado bilinear (Figura 8.6) com Módulo de Elasticidade de $E_s = 243,83 \text{ GPa}$. O limite superior à tensão de escoamento característica foi o mesmo da tensão experimental do aço utilizado, o qual nesta pesquisa foi de $f_{ys} = 573 \text{ MPa}$ em $\varepsilon_{ys} = 2,35 \text{ ‰}$ (CA – 50).

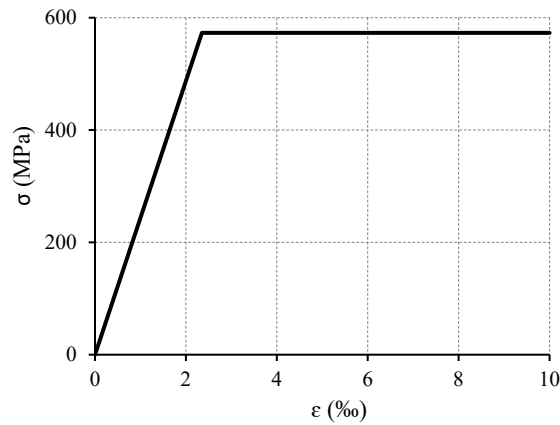


Figura 8.6 – Resposta do aço à tração (MODEL CODE 90, 1991)

8.3. Método dos elementos finitos (FEM) e Dano do Concreto (CDP)

No programa ABAQUS CAE 6.14, existem três maneiras para a modelagem do comportamento não linear de estruturas de concreto. Duas delas são baseados no método de propagação de fissuras chamado de *Concrete Smeared Cracking* e *Brittle Cracking*. A terceira maneira é baseada em teorias de plasticidade chamada *Concrete Damage Plasticity* (CDP). Este modelo pode ser usado tanto para análises estáticas quanto dinâmicas com *Finite Element Analysis* (FEM) juntamente com CDP. Neste último, é possível definir níveis de degradação dos materiais sob condições de tração e compressão assumindo o comportamento da lei de abertura de fissura e energia da fratura. Este dano é associado com os mecanismos de fissuração e esmagamento do concreto que resultam em perda de rigidez da peça.

Nesse contexto de teoria de dano, a perda de rigidez é isotrópica e caracterizada por variáveis de degradação d_t e d_c para tração e compressão, respectivamente. E a lei tensão-deformação sob o estado de tensão uniaxial de tração e compressão pode ser expressa das seguintes formas, respectivamente:

$$\sigma_t = \frac{(1 - d_t)}{E_0 \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_t^p)} \quad \text{Equação 8.20}$$

$$\sigma_c = \frac{(1 - d_c)}{E_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_c^p)} \quad \text{Equação 8.21}$$

Em que:

E_0 – módulo de elasticidade inicial;

ε_t^p – deformação plástica equivalente à tração;

ε_c^p – deformação plástica equivalente à compressão.

O estado biaxial de tensões usado no CDP já inclui as modificações que foram propostas posteriormente. A função representativa é uma combinação geométrica de dois diferentes tipos de funções de *Drucker-Prager*, conforme ilustrado abaixo:

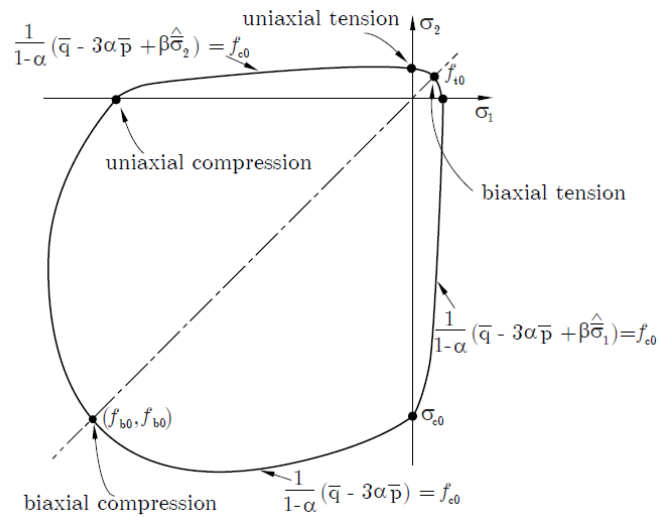


Figura 8.7 – Modelo constitutivo do estado biaxial de tensões (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)

A função de *Drucker-Prager* usada no CDP é ilustrada na Figura 8.8 e na Equação 8.22. O comportamento da função não é idêntico à superfície de plastificação no plano meridional se o ângulo de dilatação e o ângulo de atrito do material forem diferentes.

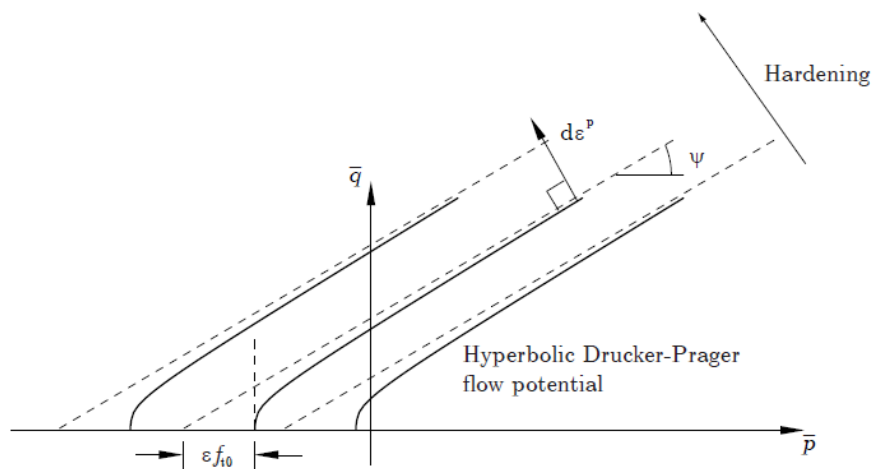


Figura 8.8 – Função de *Drucker-Prager* (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)

$$G = \sqrt{(\epsilon \cdot f_{t0} \cdot tg(\psi))^2 + q^2} - p \cdot tg(\psi) \quad \text{Equação 8.22}$$

Em geral, a observação experimental de materiais quase frágeis, incluindo o concreto, é de que a rigidez na compressão é restaurada com o fechamento da fissura assim que o carregamento muda de tração para compressão. Por outro lado, a rigidez à tração não é recuperada uma vez

que microfissuras tenham se desenvolvido. Este comportamento é observado na Figura 8.9, onde $\Gamma_t = 0$ corresponde à nenhuma recuperação quando a sollicitação muda de compressão para tração e $\Gamma_c = 1$ corresponde à recuperação completa quando a sollicitação muda de tração para compressão.

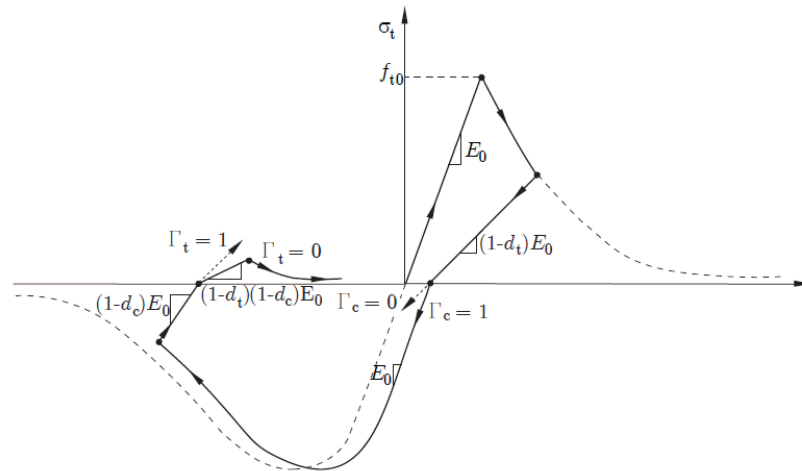


Figura 8.9 – Ciclo assumindo valor padrão de restauração de rigidez (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004)

O modelo do CDP é inicialmente direcionado para a análise de estruturas de concreto armado sob carregamento cíclico e/ou dinâmico. Também é adequado para análise de materiais quase frágeis como rochas, argamassa e cerâmicas. Sob baixas condições de confinamento, o concreto se comporta de maneira frágil e seus principais mecanismos de ruptura são fissuração na tração e esmagamento na compressão. O comportamento frágil do concreto desaparece quando as condições de confinamento são suficientes para prevenir a propagação das fissuras. Nessas circunstâncias, a ruptura acontece pelo colapso da microestrutura do concreto, levando à resposta macroscópica que se assemelha ao comportamento dúctil com efeito *hardening* pós-pico (HIBBITT, KARLSSON e SORENSEN, 2004).

Materiais com comportamento *softening* quando sofrem perda de rigidez frequentemente geram dificuldades de convergência na análise feita pelo programa. Algumas dessas dificuldades podem ser evitadas com o uso de um fator de viscosidade (μ) das equações constitutivas. O CDP pode ser regularizado através desse fator, permitindo que as tensões atuem fora da superfície de plastificação. O tensor é definido conforme a Equação 8.23.

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{\mu} (\varepsilon^p - \varepsilon_v^p) \quad \text{Equação 8.23}$$

O parâmetro μ representa o tempo de relaxação do sistema viscoplástico e ε^p , a deformação plástica avaliada no modelo estrutural; assim, o modelo viscoplástico é como:

$$\sigma = (1 - d_v) \cdot D^0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_v^p) \quad \text{Equação 8.24}$$

A solução prática do sistema viscoplástico se dá em casos como de fluido sem viscosidade quando “ $\Delta t/\mu \rightarrow \infty$ ”, onde “ Δt ” é o incremento de tempo. O uso da regularização viscoplástica com valores pequenos para o parâmetro de viscosidade geralmente ajuda a melhorar a taxa de convergência do modelo no regime *softening* sem comprometimento dos resultados (HIBBITT, KARLSSON E SORENSEN, 2004).

Segundo o manual do ABAQUS, as variáveis de dano variam de 0 (zero) para o material sem danos para 1 (um) com o material totalmente danificado e com perda total de resistência. Também explica que a formulação destes escalares ocorre em função de deformações plásticas, temperatura e variáveis externas:

$$d_c = d_c \cdot (\varepsilon_c^{pl}, \theta, f_i); 0 < d_c < 1 \quad \text{Equação 8.25}$$

$$d_t = d_t \cdot (\varepsilon_t^{pl}, \theta, f_i); 0 < d_t < 1 \quad \text{Equação 8.26}$$

É notório que a determinação dessas funções é trabalhosa e complexa, e para isso Hassan, Mahmud e Zhenjun (2013) apresentam uma forma de simplificação de acordo com as Equações a seguir juntamente com a Figura 8.10 e Figura 8.11, para danos de compressão e tração, respectivamente.

$$d_c = 1 - \frac{\sigma_c \cdot E_{ci}^{-1}}{\varepsilon_c^{pl} \left(\frac{1}{b_c} - 1 \right) + \sigma_c \cdot E_{ci}^{-1}} \quad \text{Equação 8.27}$$

$$d_t = 1 - \frac{\sigma_t}{f_{ctm}} \quad \text{Equação 8.28}$$

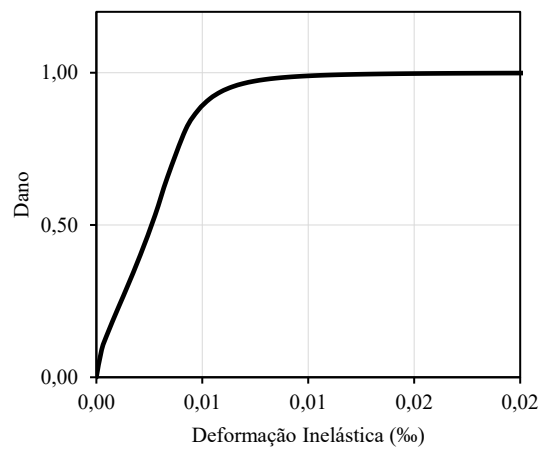


Figura 8.10 – Curva de dano de compressão utilizada

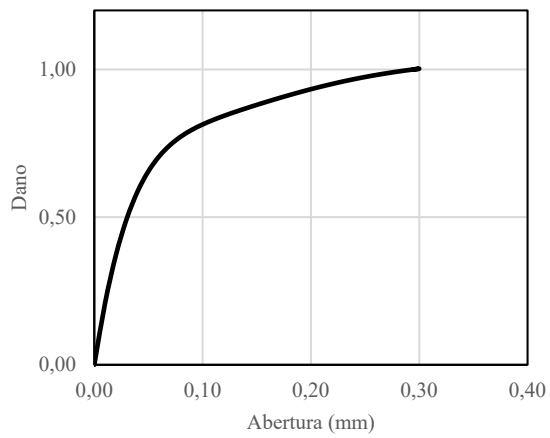


Figura 8.11 – Curva de dano de tração utilizada

8.4. Modelagem

Nesta etapa de análise, foram utilizados três tipos de elementos para modelagem da estrutura: para o concreto foi testado o elemento C3D8R (*3d Continuum, 8-node element with hourglass control*) elemento hexaédrico contínuo de três dimensões, com 8 nós e integração reduzida; e o elemento C3D4 (*3d Continuum, 4-node element*) elemento tetraédrico contínuo de três dimensões, quatro nós e integração normal), indicado pelo fabricante *Simulia* para modelagem tensão-deslocamento, conforme mostra a Figura 8.10 a) e b). Por fim, para a modelagem da armadura, aplicou-se o elemento T3D2 (*3d Truss, 2-node element*) elemento de treliça espacial composto por dois nós, conforme mostra a Figura 8.10 c). Deve-se destacar que, nesta fase, foram implementadas todas as variáveis de dano d_t e d_c do concreto complementando esta simulação FEM-CDP.

O *hourglass* é essencialmente um modo de deformação adulterado de uma malha de elementos finitos, resultante da excitação de graus de liberdade de energia zero. Ele normalmente se manifesta como forma retalhada (Figura 8.11), na qual os elementos individuais são excessivamente deformados, enquanto a seção geral da malha é indeformada (Schulz, 1985). Isto tende a acontecer nos elementos de integração reduzida (a integração reduzida diminui bastante o custo computacional) usados para análise não linear mais econômica de estruturas espaciais como os sólidos hexaédricos 3D; para isso, o próprio software fornece um controle eficiente sobre o efeito *hourglass*, confirmado com os resultados observados.

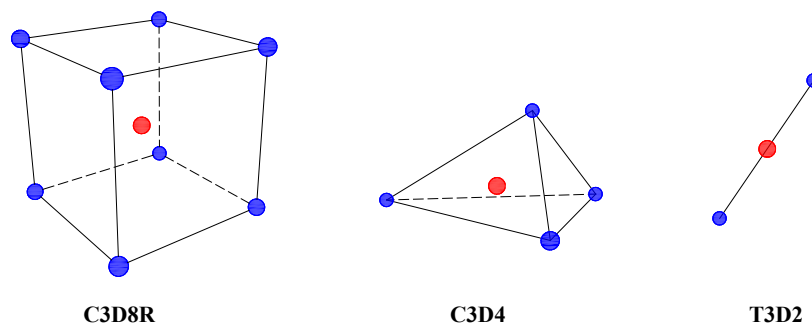


Figura 8.12 – Tipos de elementos usados na modelagem

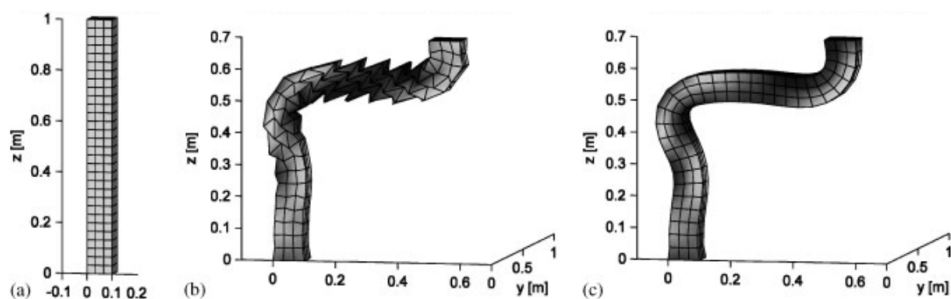


Figura 8.13 – Deformação de um pilar: a) indeformado; b) deformado sem controle do efeito *hourglass*; e c) deformado com o controle do efeito *hourglass* (JOLDES, WITTEK e MILLER, 2008)

Na ausência de dados experimentais de estado biaxial de tensão, ângulo de dilatação e excentricidade do concreto, optou-se por obter um baixo custo computacional e, ainda assim, o máximo de precisão nos resultados, que foram posteriormente conferidos com a resposta *carga x deslocamento* da laje experimental. Para tanto, adotou-se parâmetros próximos dos utilizados e comprovados por Navarro, Ivorra e Varona (2018), apresentados na Tabela 8.2, que compararam respostas computacionais e experimentais com precisão satisfatória, de lajes lisas bidirecionais de concreto armado à punção com concreto de resistência à compressão entre 25 e 55 MPa e aço de tensão de escoamento nominal entre 400 e 600 MPa. Na pesquisa dos autores também foram utilizados elementos do tipo C3D8R para modelagem de elementos de laje e pilar, e elementos do tipo T3D2 para modelagem das armaduras.

Tabela 8.1 – Parâmetros de Navarro, Ivorra e Varona (2018) para o FEM-CDP

ψ	ϵ	μ	f_{b0}/f_{c0}	K
36°	0,1	0,00001	1,16	0,667

De acordo com Jankowiak e Lodygowski (2005), estes são parâmetros aceitos, pois para concretos convencionais na ausência de ensaios triaxiais, “K = 0,667” é o valor normalmente adotado por inúmeros autores; f_{b0}/f_{c0} varia entre 1,0 e 1,5 e o ângulo de dilatação ψ varia entre 0,6 e 0,75 radianos (34,38° à 42,97°). A influência do último fator pode ser vista nos resultados obtidos por Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1979), quando ele é usado por outros programas como o Atena, que apresenta maiores resistências à compressão no estado biaxial quando a menor de duas resistências é igual à 40% da resistência à compressão do concreto (f_{c0}). Em comparação, no modelo de Lee e Fenves (1998), usado pelo Abaqus/CAE 6.14, a mais alta resistência é obtida em 80% de f_{c0} . É possível perceber que as duas superfícies coincidem em $\sigma_1/\sigma_2 \approx 0,41$. Para maiores estados de tensão, o Abaqus fornece maiores resistências à compressão, de acordo com a Figura 8.12.

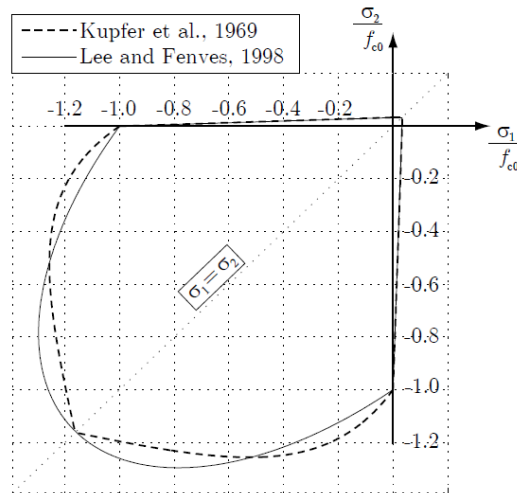


Figura 8.14 – f_b/f_{c0} no Atena (KUPFER, HILSDORF E RUSCH, 1979) e no Abaqus (LEE E FENVES, 1998)

Nesta modelagem, para consideração da aderência perfeita entre aço e concreto, foi utilizada uma limitação do tipo “*embedded region*”. Para o contato entre a viga de reação e a laje de concreto, foi aplicada uma limitação do tipo “*tie*” e para simulação do carregamento/deslocamento na base do pilar, foi utilizada uma limitação do tipo cinemática “*coupling*”.

A calibração dos modelos foi realizada através da comparação dos resultados numéricos *versus* experimentais da laje L1A, considerando cargas e deslocamentos observados durante o ensaio até o momento da ruptura total da peça, consonante com o que se apresenta a seguir.

Segundo Schaefer (2002), as borrachas vulcanizadas têm módulo de elasticidade baixo (entre 1 e 5 MPa) e coeficientes de Poisson altos (entre 0,25 e 0,49), sendo capazes de absorver deformações de até 1000%. Esses resultados foram observados por Bouaziz *et al* (2020), que experimentaram módulos de elasticidade entre 0,5 e 2,0 MPa em borrachas de polícloropreno de até 8000h de uso.

Um dos processos de caracterização mecânica da borracha é a medida da dureza SHORE ou GIDB (Graus Internacionais de Dureza da Borracha, em inglês *IRHD*) através de durômetro específico para esta aplicação (conforme CAETANO, M. J. L./ www.ctborracha.com, 2010). Na ausência deste optou-se por, através de análise linear computacional, realizar a calibração das propriedades mecânicas (coeficiente de Poisson e Módulo de elasticidade) do elastômero

utilizado entre a superfície da laje e da viga metálica de apoio, como mostra a Figura 8.13 para coeficientes de Poisson extremos e a Figura 8.14 para módulo de elasticidade médio.

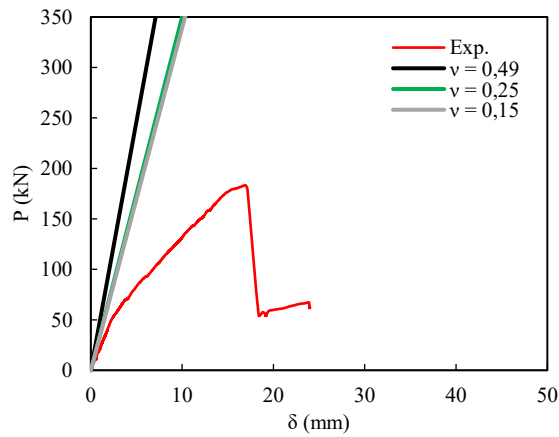


Figura 8.15 – Calibração do coeficiente de Poisson

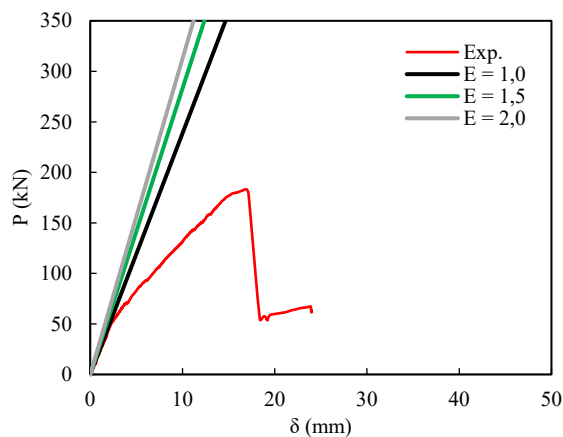


Figura 8.16 – Calibração do Módulo de elasticidade

Em seguida, calibrado o trecho linear de comportamento, partiu-se para a calibração da resposta não linear da laje. Foram utilizados elemento do tipo hexaédrico C3D8R e discretização em 30, 40 e 50 mm de malha, conforme ilustrado na Figura 8.15, em que se nota a grande diferença do comportamento computacional quando comparado com o experimental. Em comparação, o uso do elemento do tipo tetraédrico C3D4 e discretização em 30, 40 e 50 mm, conforme apresenta a Figura 8.16, gerou resposta mais coerente com o experimento. Exposto isto, é possível inferir que, nesta pesquisa, a discretização da malha pouco colaborou para a aproximação dos resultados, diferentemente do tipo de elemento tridimensional utilizado, em que o tetraédrico com maior número total de nós e pontos de integração corrobora a resposta experimental da laje L1A.

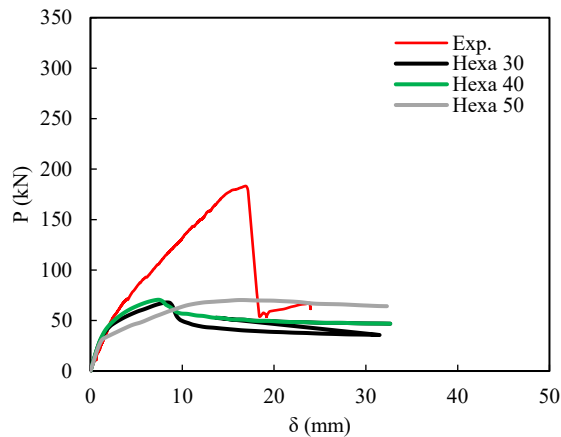


Figura 8.17 – Calibração da malha hexaédrica

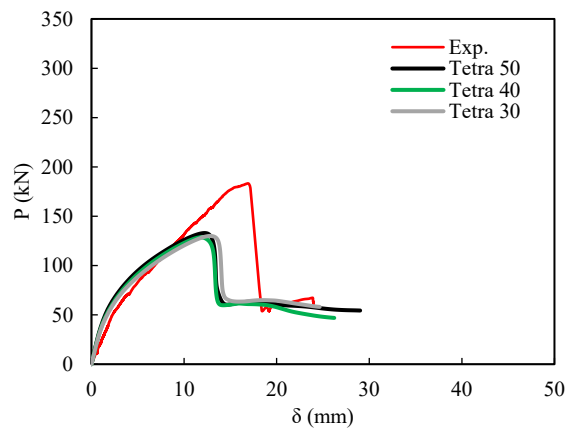


Figura 8.18 – Calibração da malha tetraédrica

Como penúltimo passo da calibração, foram testados o ângulo de dilatação (α) e a viscosidade (μ) do concreto. O primeiro - entre 38° e 42° - dentro do intervalo de estudos feitos por [Malm \(2006\)](#) para estruturas de concreto armado, e o segundo - entre 0,0001 e 0,002 - conforme [Demir et al \(2018\)](#), também para estruturas de concreto convencional. Deve-se destacar a Figura 8.17, na qual fica explícita a maior influência do parâmetro α no comportamento pós-pico (pós ruptura) da peça. Para menores valores, a peça se torna mais frágil e para maiores valores (tendendo para o ângulo de fricção do material " $\beta = \arctan [3/2] \cong 56,3^\circ$ "), a peça tende se tornar mais dúctil.

Na Figura 8.18, a viscosidade modifica o desempenho da peça através da regularização da perda de rigidez tangente do material, tornando-a positiva para incrementos suficientemente pequenos até a convergência do modelo. Assim, μ afeta tanto o tempo de processamento total quanto a carga máxima alcançada na simulação. Em manuais do Abaqus 6.14 e na literatura, não é

definido valor padrão para esta viscosidade, até mesmo por este não ser um parâmetro experimental.

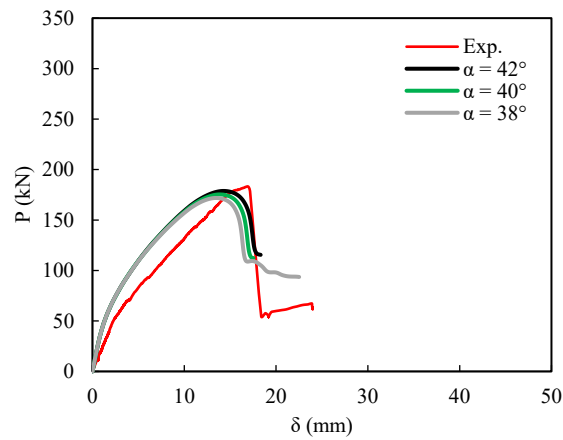


Figura 8.19 – Calibração do ângulo de dilatação

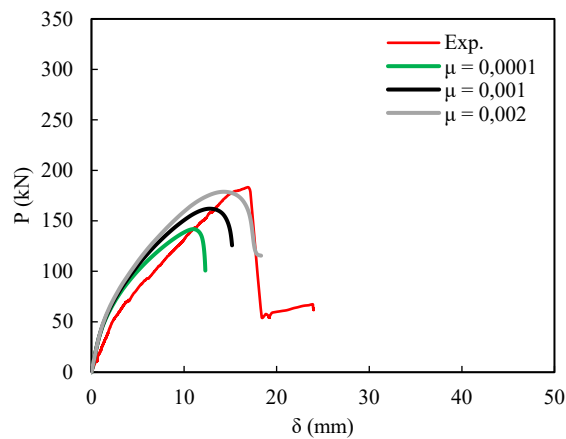


Figura 8.20 – Calibração da viscosidade

A partir de então, adotou-se na modelagem Abaqus 6.14/*FEM-CDP* a malha tetraédrica de 40 mm e os parâmetros de dano do concreto segundo os valores apresentados pela Tabela 8.2 na simulação final de todas as lajes.

Tabela 8.2 – Parâmetros do concreto calibrados aplicados na modelagem FEM-CDP

ψ	ϵ	μ	f_{b0}/f_{c0}	K
38°	0,1	0,002	1,16	0,667
Módulo de elasticidade inicial			E_c	26,63 GPa
Coeficiente de Poisson			ν	0,2
Resistência à compressão			f_c	28 MPa
Deformação em 28 MPa			ϵ_{c0}	2,2 ‰
Resistência à tração			f_t	2,3 MPa

No Abaqus (LEE e FENVES, 1998), a análise estática geral utiliza o método de *Newton Raphson* (DRAVESH e PRASHANTH, 2022 e KIM-HUNG, 2022), o qual, neste caso de análise, é mais indicado para incrementos monotônicos e sem decréscimo por controle de deslocamento (Figura 8.19), ao contrário do que ocorre com o controle de força (Figura 8.20). E, por esta razão, pode não ser visível o momento em que ocorre a ruptura estrutural quando se analisa apenas a curva carga *versus* deslocamento.

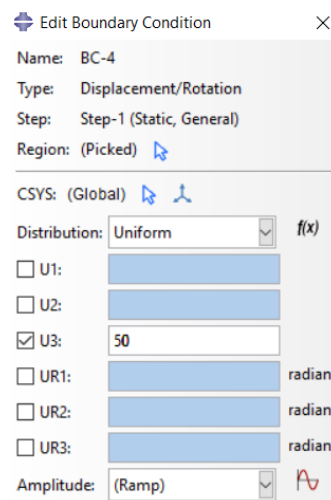


Figura 8.21 – Aplicação de deslocamento no software Abaqus CAE 6.14

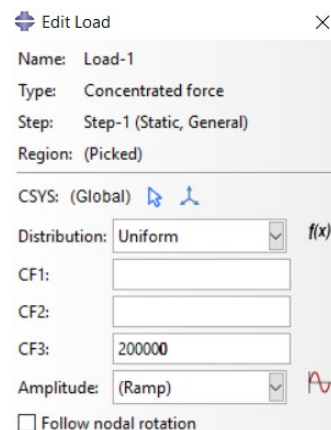


Figura 8.22 – Aplicação de força no software Abaqus CAE 6.14

Também para Santos Júnior (2019), a análise estática geral descreve bem este tipo de comportamento. Assim, na realização da simulação computacional, o modelo numérico é controlado através de uma flecha induzida, isto é, aplicando-se um deslocamento crescente monotônico que representa o movimento feito pelo cilindro hidráulico sob a placa de concreto armado; mais especificamente, um deslocamento de 50 mm que cobre a flecha máxima

experimental observada nas lajes ensaiadas, considerada razoável para obter o padrão de comportamento computacional completo de todas as lajes modeladas.

Doravante, os problemas de convergência que podem surgir com uma análise de força controlada são minimizados, conforme prova o estudo paramétrico realizado aqui com a laje L1A (lisa, unidirecional de concreto armado desta pesquisa), apresentado na Figura 8.21, em que fica claro o efeito da fissuração e ruptura (frágil) da peça - neste caso, quando se aplica o deslocamento, o que não pôde ser observado no modelo que simula a aplicação de força.

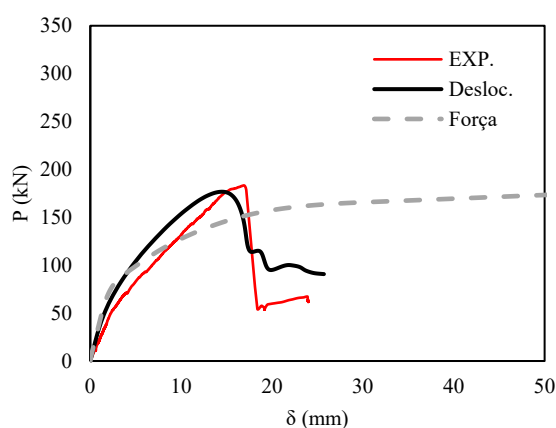


Figura 8.23 – Estudo paramétrico entre aplicação de força e deslocamento usando o método estático geral.

Por fim, foi realizado outro estudo paramétrico com o objetivo de diminuir mais ainda os custos computacionais, comparando-se a modelagem da laje completa (100%) e a modelagem de $\frac{1}{4}$ da laje (25%), ilustrada na Figura 8.22. Foram mantidos idênticos todos os parâmetros e as propriedades físicas e mecânicas dos materiais com o uso das opções de simetria constantes no software ABAQUS CAE 6.14, por meio das condições de contorno equivalentes aplicadas ao modelo (25%), em que se restringe o deslocamento lateral das faces cortadas, de acordo com a Figura 8.23.

Esta metodologia foi considerada satisfatória em testes de convergência realizados na pesquisa de [Alfarah, Lopez-Almansa e Oller \(2017\)](#), que compararam malhas de 200, 50 e 25 mm para análise de deslocamentos em estruturas de concreto armado.

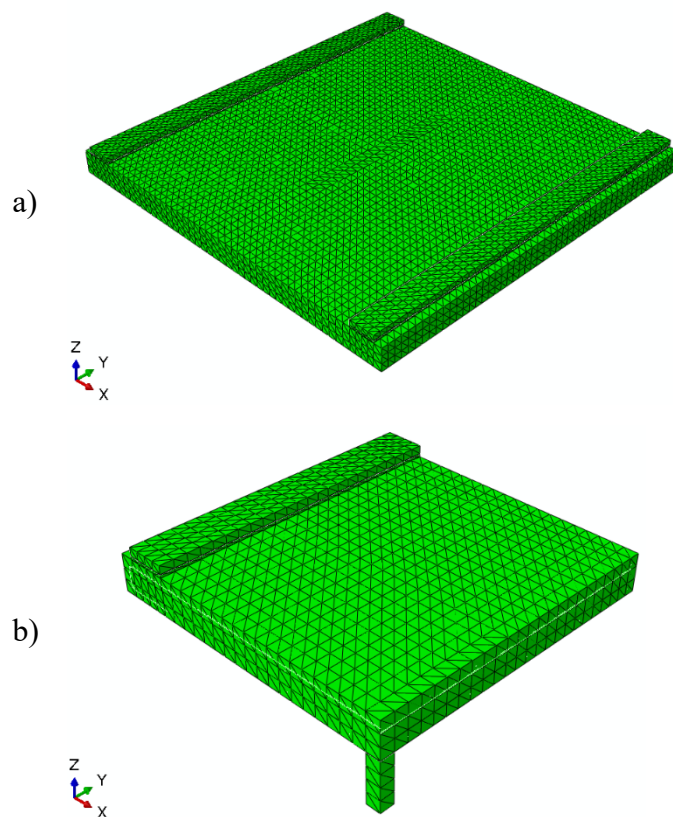


Figura 8.24 – Modelos: a) laje completa ou 100%; b) $\frac{1}{4}$ da laje ou 25%

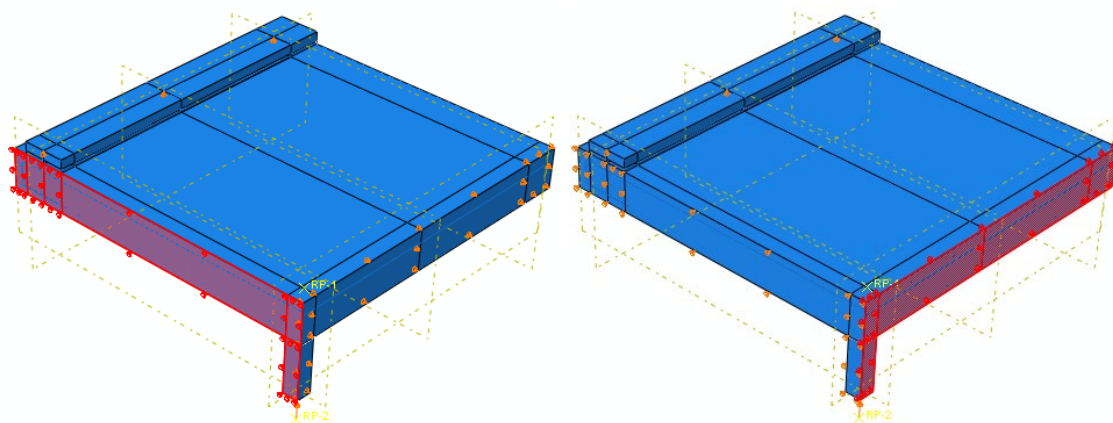


Figura 8.25 – Condições de contorno (modelagem de $\frac{1}{4}$ da laje)

Assim, constata-se que é possível modelar apenas $\frac{1}{4}$ das lajes em estudo, obter resultados precisos e otimizar mais ainda o custo computacional, conforme mostrado na Figura 8.24, na qual os resultados se mostram totalmente coerentes.

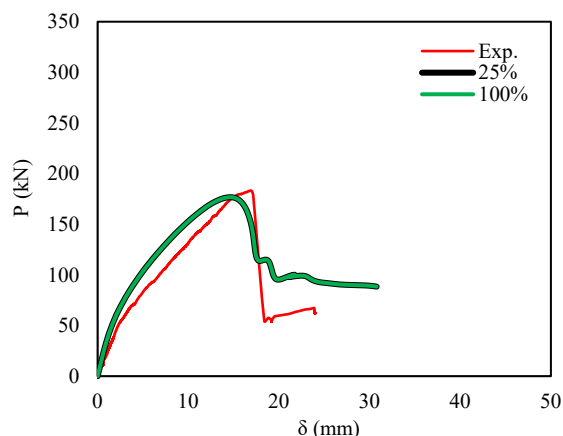


Figura 8.26 – Estudo paramétrico entre a modelagem da laje inteira e $\frac{1}{4}$ da laje

8.5. Resultados computacionais

O propósito desta análise FEM-CDP é comparar a capacidade do programa ABAQUS CAE 6.14 de simular o comportamento de lajes unidirecionais de concreto armado à punção. Para tornar isso possível, todas as lajes foram modeladas com as mesmas propriedades físicas e mecânicas.

Quando sujeito à compressão (item 8.2.1), o trecho elástico se estende até 40% da resistência à compressão do concreto. Após essa porcentagem, a curva se comporta conforme apresentado anteriormente. Quando a força aplicada é a tração (item 8.2.2), os comportamentos *softening* ou *hardening* podem ser representados por qualquer modelo de curva desde que haja taxa de convergência e representatividade suficiente nos testes, ou ainda modos de ruptura frágeis e dúcteis. Em ambos, o trecho elástico se estende até a tensão resistente máxima de tração do concreto.

Para uniformização do sistema de ensaio computacional, todas as lajes receberam o mesmo deslocamento total de 50 mm, ou até o momento em que foi possível perceber a ruptura, com passos de 1 mm, por um período total de 10 unidades aplicados na base do pilar. E em ambas as lajes foram criadas limitações (*constraints*) para integração e obtenção das reações verticais totais nos apoios. Todos os resultados apresentados a seguir (exceto históricos de carregamento) são correspondentes ao incremento responsável pelo pico máximo de carregamento de cada laje.

8.5.1. DANO DO CONCRETO

Em relação à plastificação, é possível afirmar que a maior parte das lajes (L1A, L2A, L3A, L1B e L2B) apresenta formação evidente do tronco de cone de punção devido à concentração de tensões na região central da laje, principalmente na presença de pilares quadrados (grupo A, Figura 8.25 à Figura 8.27) de $(85 \times 85 \text{ mm})$, em que o perímetro crítico tende a ser menor e não há maior influência do índice de retangularidade do pilar e pilares retangulares de índice 3 (grupo B, Figura 8.28 e Figura 8.29).

As demais lajes tendem a apresentar sinais de danos em áreas mais distribuídas, indicando um comportamento mais dúctil e provável ruptura por flexo-punção ou flexão devido à forte contribuição da forma dos pilares, somada à influência da taxa de armadura secundária, conforme mostrado da Figura 8.30 à Figura 8.32. Esse comportamento é diferente em comparação ao das lajes anteriores, pois foi mais frágil, havendo a formação do tronco de cone de punção. Deve-se destacar a formação mais evidente do dano máximo coerente com fissuras horizontais paralelas típicas de ruptura por flexão em lajes lisas unidirecionais de concreto armado, na laje L3C, o que mostra um comportamento semelhante ao observado experimentalmente (Figura 8.33).

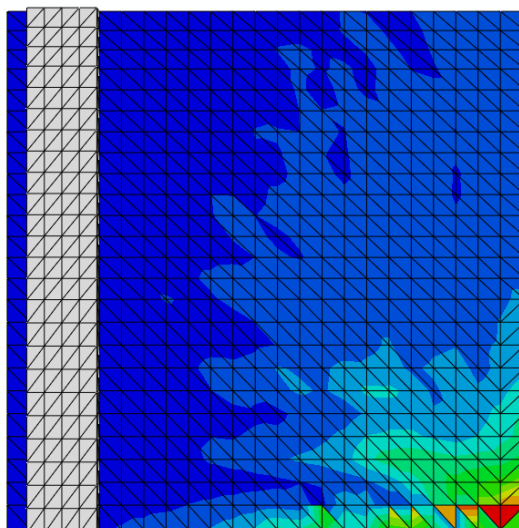
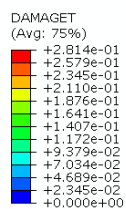


Figura 8.27 – Dano no concreto - L1A

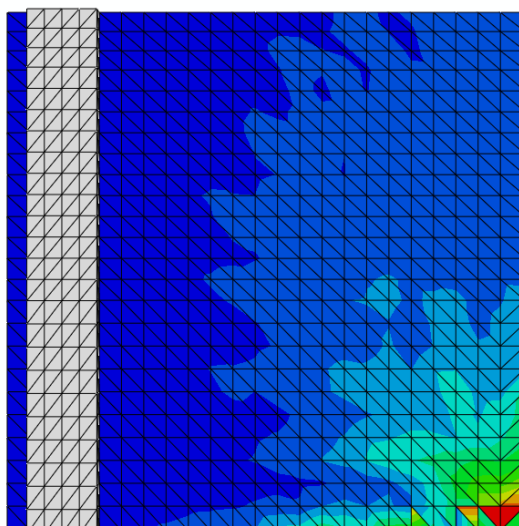
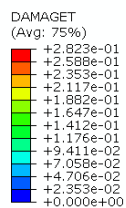


Figura 8.28 – Dano no concreto – L2A

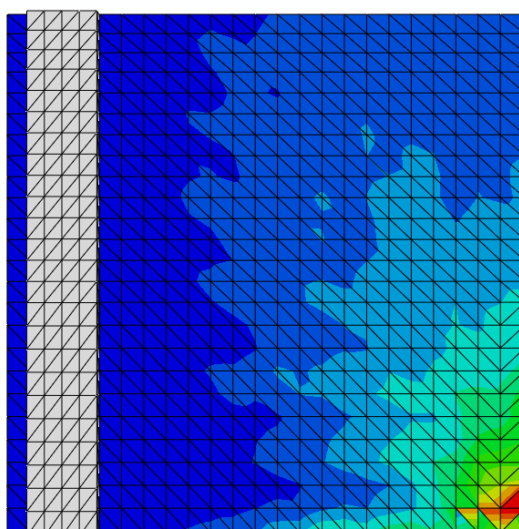
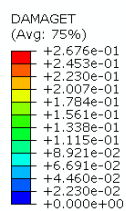


Figura 8.29 – Dano no concreto – L3A

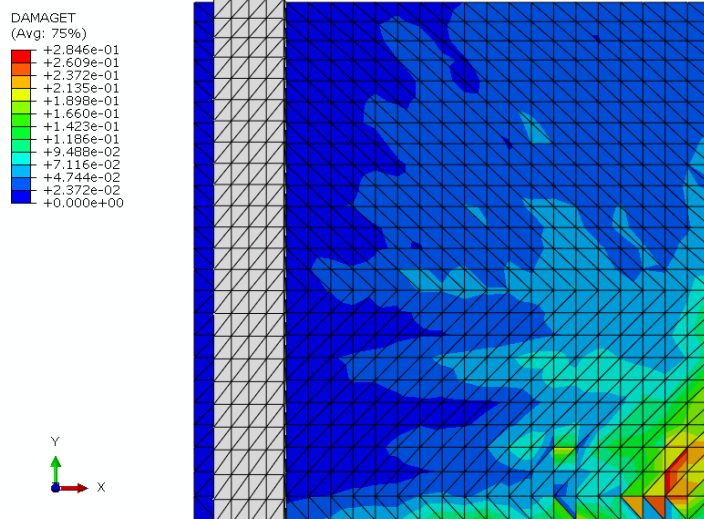


Figura 8.30 – Dano no concreto - L1B

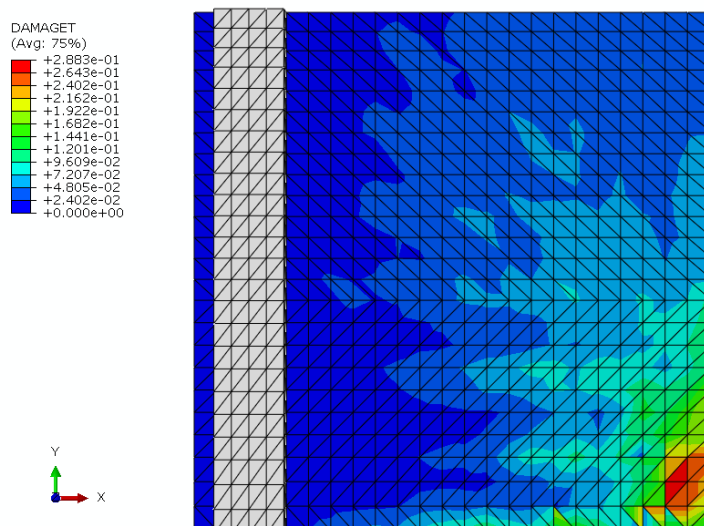


Figura 8.31 – Dano no concreto – L2B

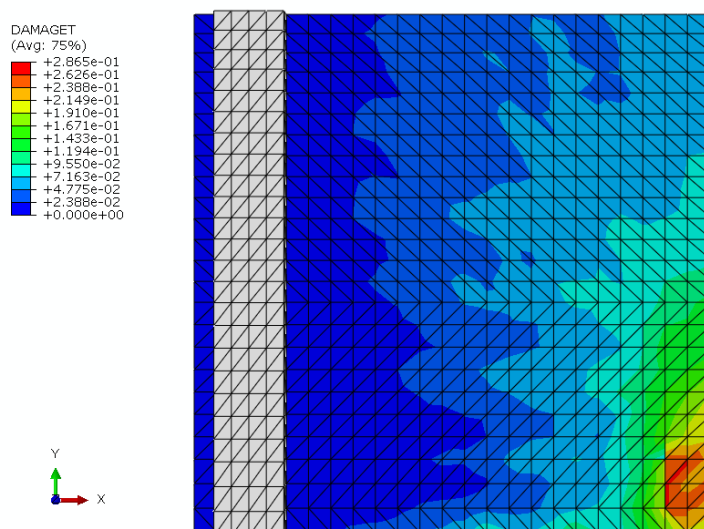


Figura 8.32 – Dano no concreto – L3B

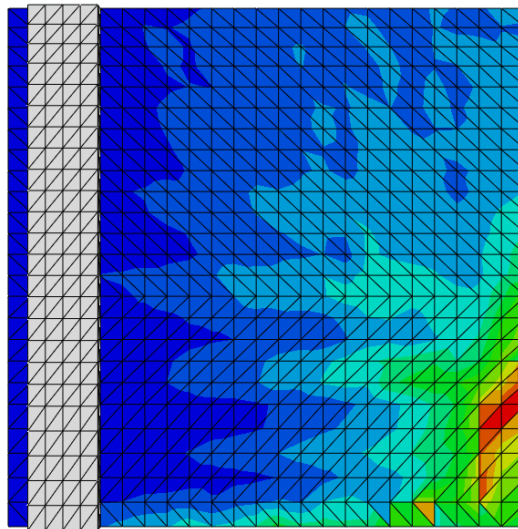
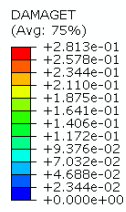


Figura 8.33 – Dano no concreto - L1C

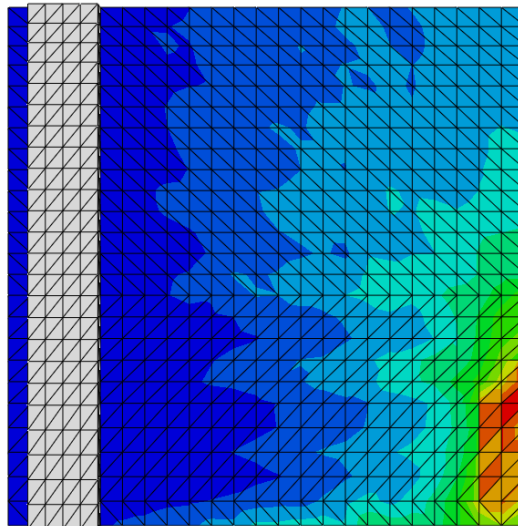
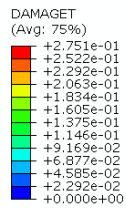


Figura 8.34 – Dano no concreto – L2C

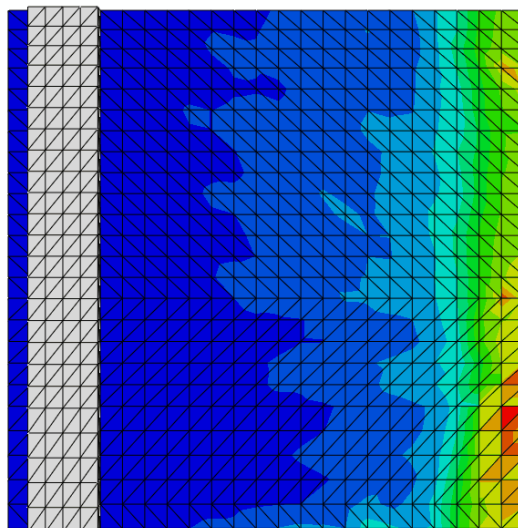
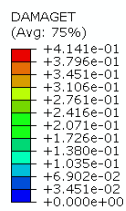


Figura 8.35 – Dano no concreto – L3C

8.5.2. CORTE DAS LAJES

Nesta seção, são apresentados os danos máximos computacionais das lajes em corte passando pela metade do vão livre na direção principal (x), de acordo com a Figura 8.34, que apresenta L1A, L2A e L3A.

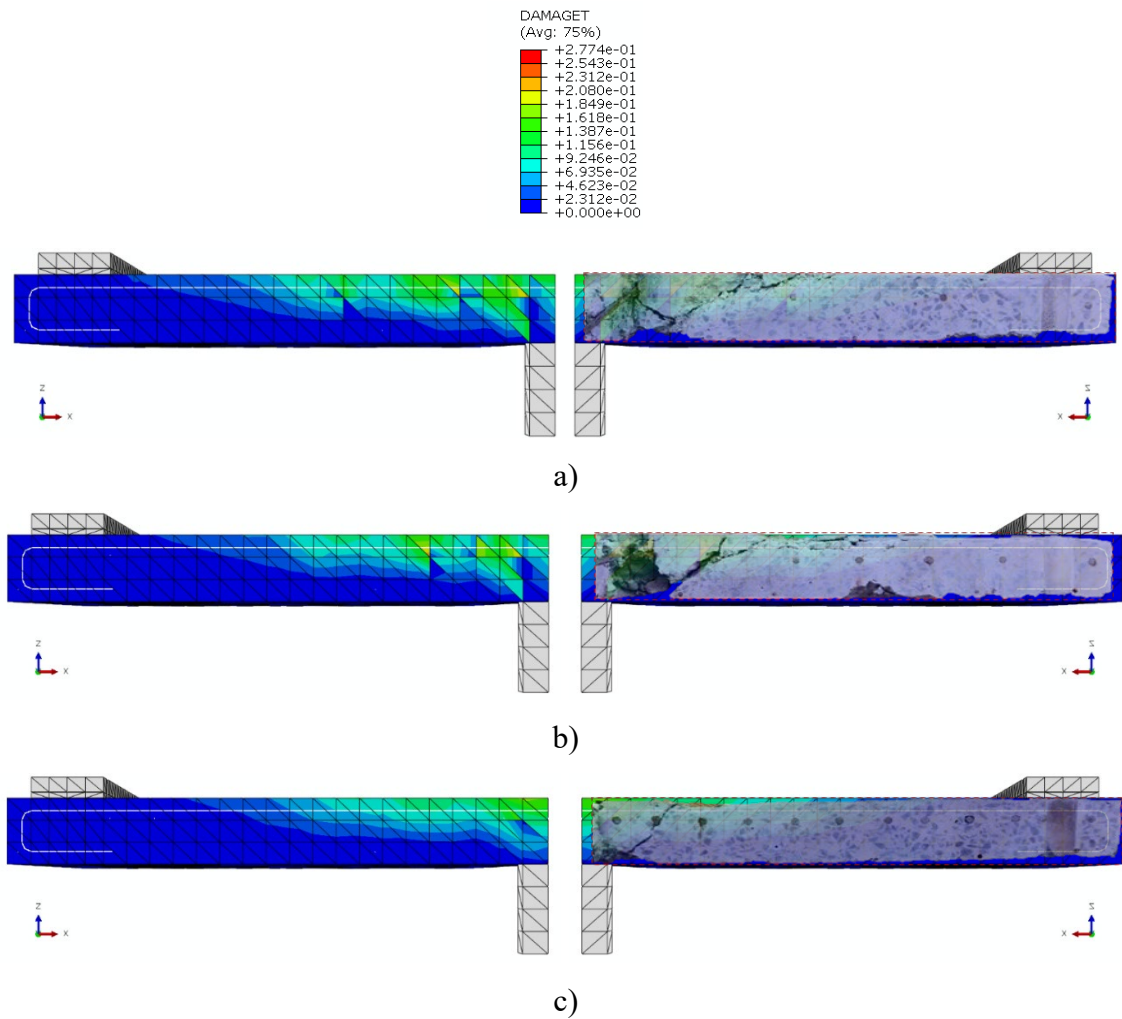


Figura 8.36 – Dano em corte das lajes do grupo A: a) L1A; b) L2A; c) L3A.

Figura 8.35: corte das lajes L1B, L2B e L3B comparando dano e fissuração.

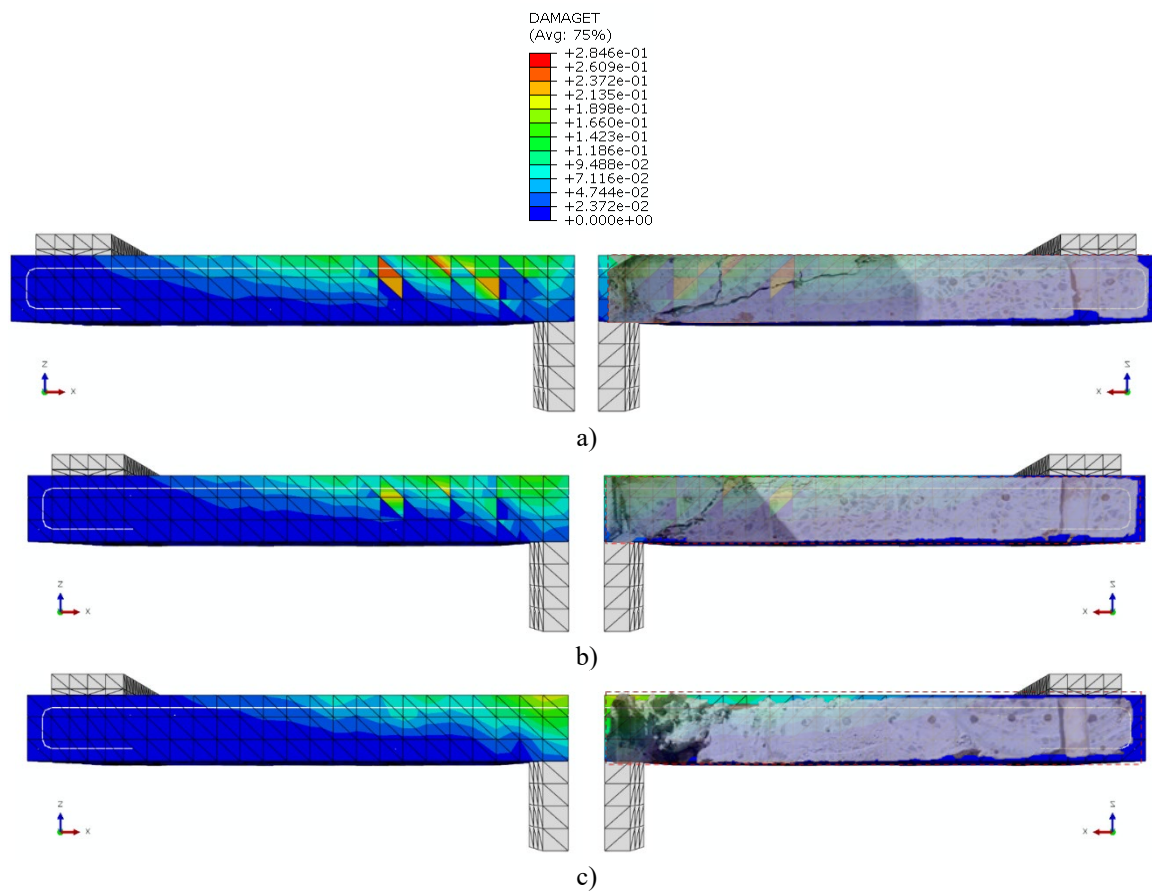


Figura 8.37 – Dano em corte das lajes do grupo B: a) L1B; b) L2B; c) L3B.

E Figura 8.36: corte das lajes L1C, L2C e L3C comparando dano e fissuração.

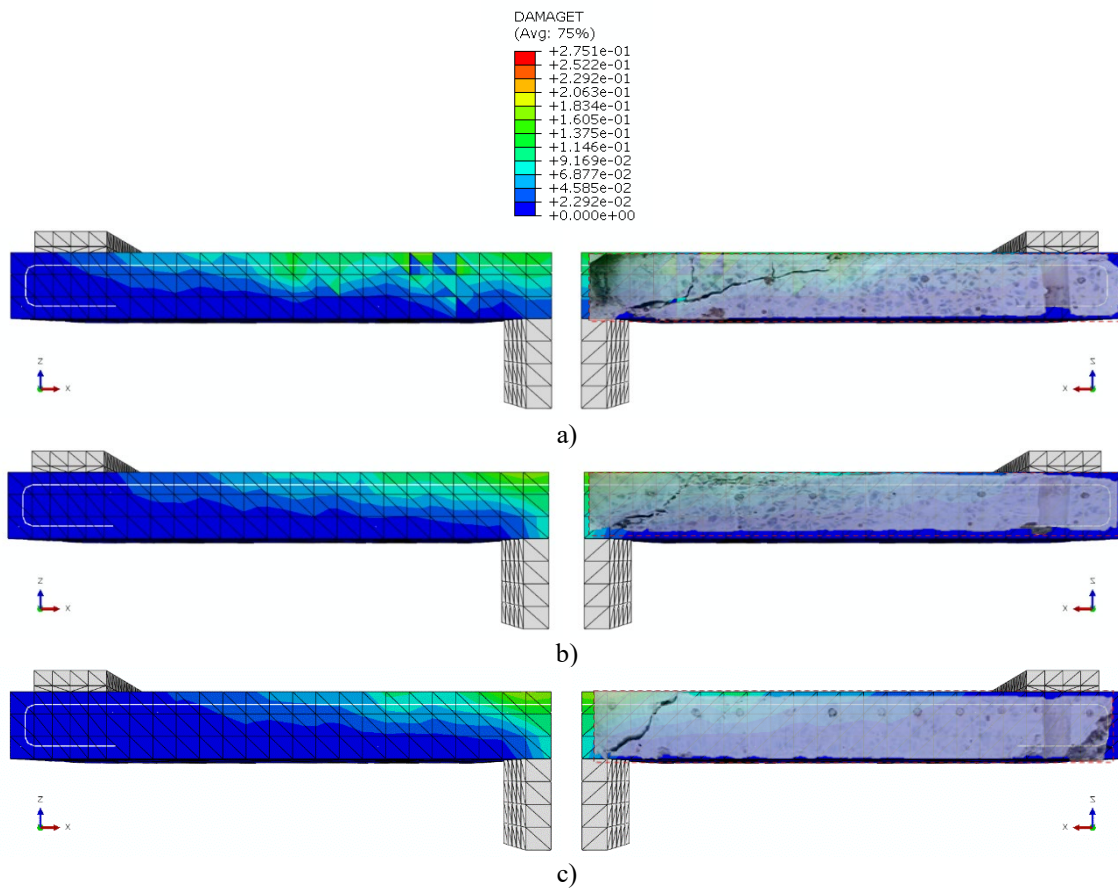


Figura 8.38 – Dano em corte das lajes do grupo C: a) L1C; b) L2C; c) L3C.

8.5.3. DEFORMAÇÕES DA ARMADURA PRINCIPAL

A observação deste item foi critério imprescindível para a determinação dos modos de ruptura (P – Punção; FP – Flexo-punção ou F – Flexão) numérico-computacionais de cada laje, haja vista que a deformação das armaduras de flexão – limite de escoamento $\epsilon_{ys} = 2,35\text{‰}$ – em parte ou em totalidade, é adotada também na seção 7.2.1. Aqui, foram monitoradas as mesmas barras e mesmas camadas de armaduras em relação àquelas analisadas experimentalmente.

De forma geral, percebe-se o comportamento mais frágil das lajes com menor taxa de armadura secundária, como é o caso das lajes do grupo A (Pilar A – $85 \times 85 \text{ mm}$), em que se torna evidente a contribuição da armadura secundária com taxa de 2% em relação a armadura secundária com taxa de 0,5%, pois esta última proporciona lajes mais frágeis sem escoamento das armaduras, enquanto a primeira proporciona lajes mais dúcteis com escoamento das armaduras que modificam o modo de ruptura da laje (Figura 8.37 - Figura 8.39). Esses resultados corroboram os modos observados experimentalmente.

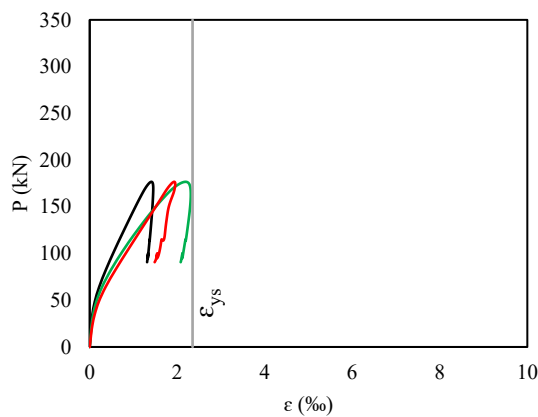


Figura 8.39 – Deformação da armadura principal - L1A (MPa)

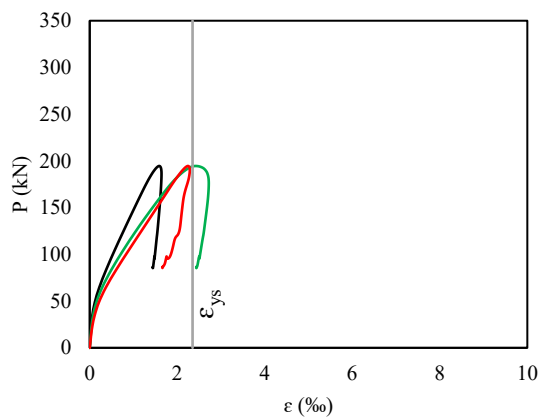


Figura 8.40 – Deformação da armadura principal – L2A (MPa)

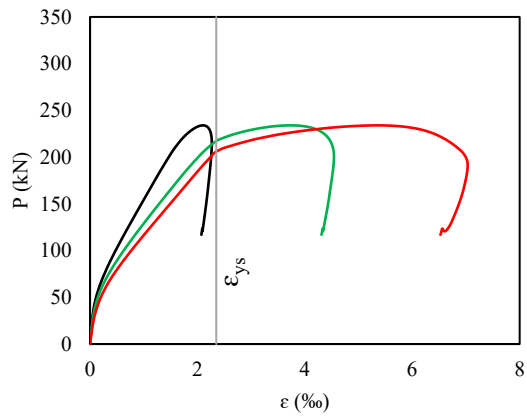


Figura 8.41 – Deformação da armadura principal – L3A (MPa)

Nas lajes do grupo B (Pilar B – 85×255 mm), houve mudança no modo de ruptura, que progrediu de punção para flexão, ao passo em que houve um aumento na taxa de armadura secundária de 0,59% para 1,09% e 2,1% enquanto permaneceu constante a armadura principal de 0,93%, conforme ilustram as Figuras 8.40 a 8.42.

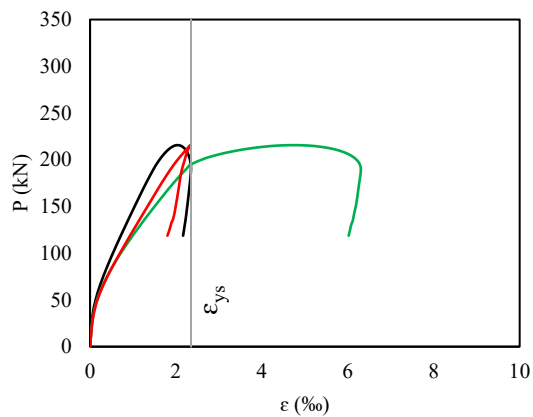


Figura 8.42 – Deformação da armadura principal - L1B (MPa)

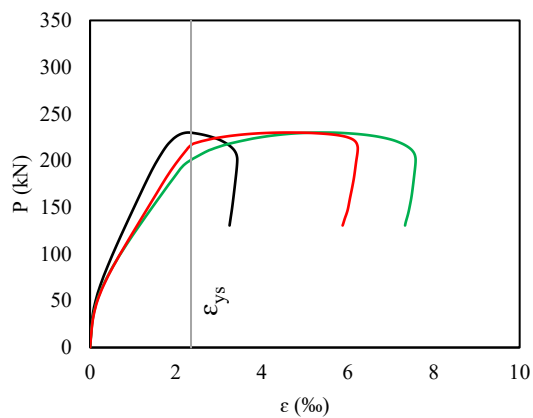


Figura 8.43 – Deformação da armadura principal – L2B (MPa)

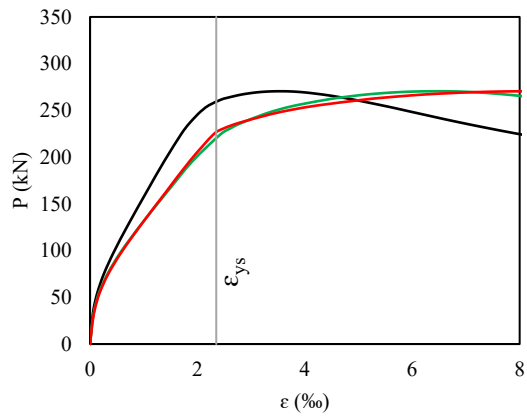


Figura 8.44 – Deformação da armadura principal – L3B (MPa)

Nota-se o comportamento mais dúctil das lajes L1C, L2C e L3C, com a maior sollicitação das armaduras principais (constante de 0,93% em todas as lajes), conforme previsto no capítulo 5 desta tese, chegando até o máximo de 303 kN de carga última (Figura 8.43 a Figura 8.45) na ruptura por flexão. Este resultado indica grande probabilidade de que lajes lisas unidirecionais com taxa de armadura secundária igual ou maior ao dobro da taxa de armadura principal não apresentem uma ruína frágil e tenham barras que ultrapassam a deformação de escoamento.

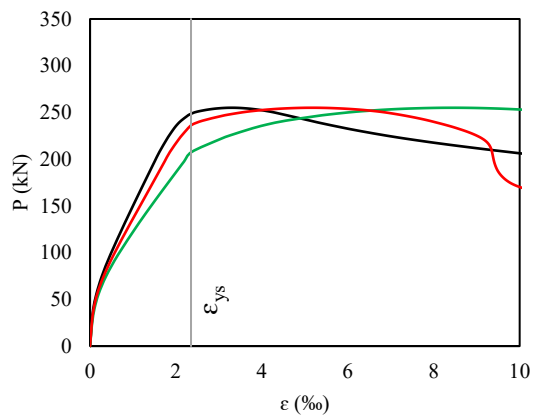


Figura 8.45 – Deformação da armadura principal - L1C (MPa)

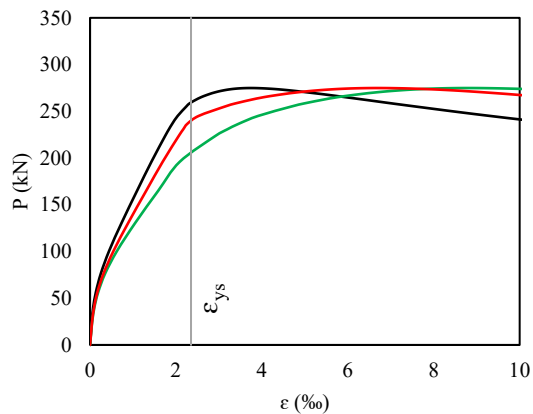


Figura 8.46 – Deformação da armadura principal – L2C (MPa)

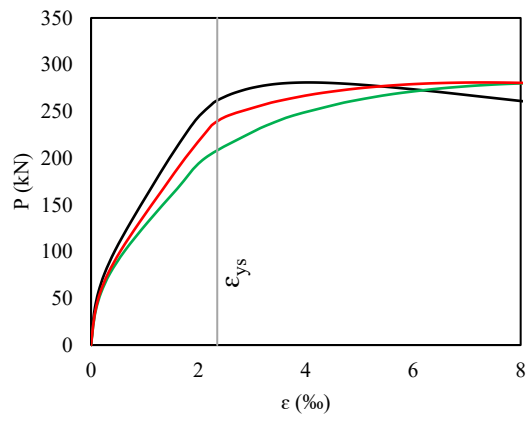


Figura 8.47 – Deformação da armadura principal – L3C (MPa)

8.5.4. DEFORMAÇÃO DA ARMADURA SECUNDÁRIA

Nesta seção, é de destaque o aumento da capacidade resistente das peças, em que, de forma análoga aos casos de aumento de área de aço com a consequente diminuição de tensão e deformação nas armaduras, resultou, para todas as lajes, exceto L1B e L1C (com apenas uma barra escoada), na ruptura sem o escoamento da armadura secundária. Assim, quando a taxa de armadura secundária é de 0,59% a 2,1%, a tensão máxima nas armaduras de modo geral não atinge a tensão de escoamento (573 MPa); logo, a deformação não atinge 2,35 ‰ (Figura 8.46 - Figura 8.54), devendo-se lembrar que a taxa de armadura principal é constante (0,93%) em todas as lajes. Esse resultado nos leva a afirmar a maior influência da taxa de armadura de flexão secundária sobre o mesmo índice de retangularidade dos pilares, com ganho máximo de 48% em carga última da laje L1A em relação à L3A, o que reflete maiores ganhos de resistência em comparação aos resultados experimentais descritos por autores como [Carvalho \(2006\)](#), [Ferreira \(2006\)](#) e [Damasceno \(2007\)](#), que observaram aumentos de até 18% na resistência última das lajes devido à taxa de armadura de flexão secundária. Essas diferenças sugerem a necessidade de se estudar cada vez mais o assunto.

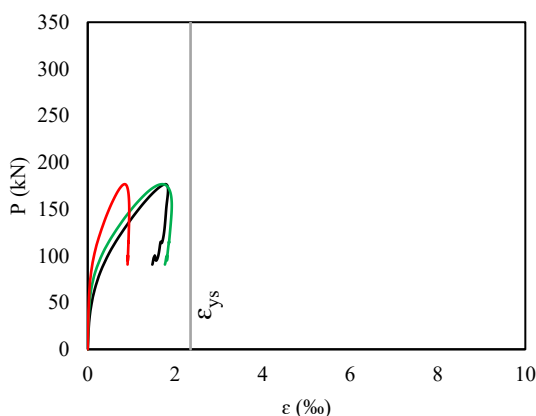


Figura 8.48 – Deformação da armadura secundária - L1A (MPa)

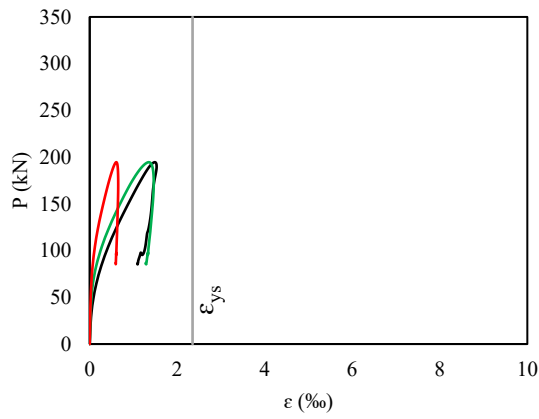


Figura 8.49 – Deformação da armadura secundária – L2A (MPa)

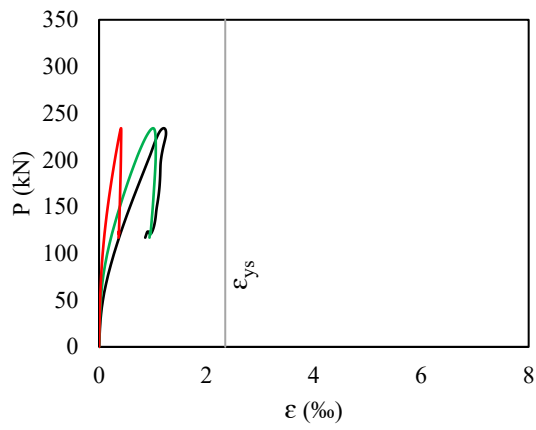


Figura 8.50 – Deformação da armadura secundária – L3A (MPa)

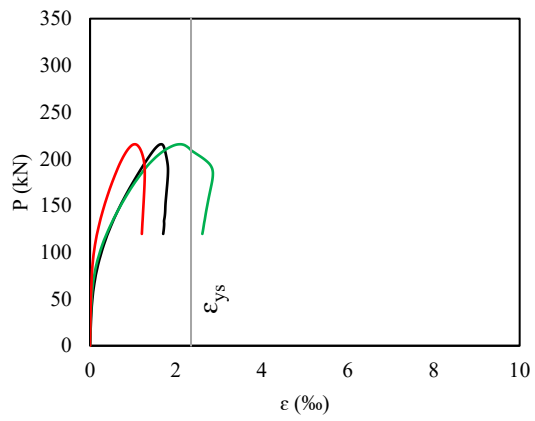


Figura 8.51 – Deformação da armadura secundária - L1B (MPa)

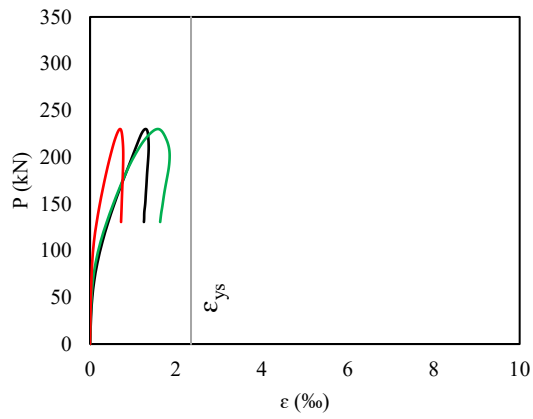


Figura 8.52 – Deformação da armadura secundária – L2B (MPa)

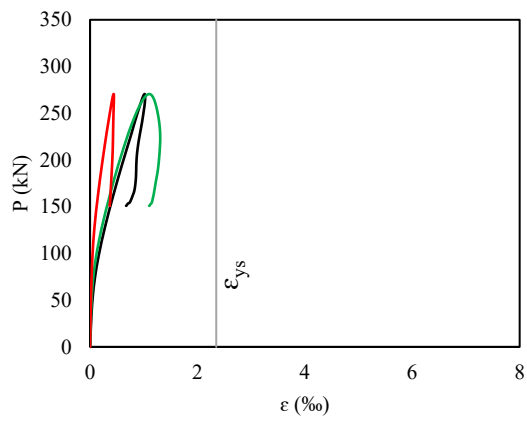


Figura 8.53 – Deformação da armadura secundária – L3B (MPa)

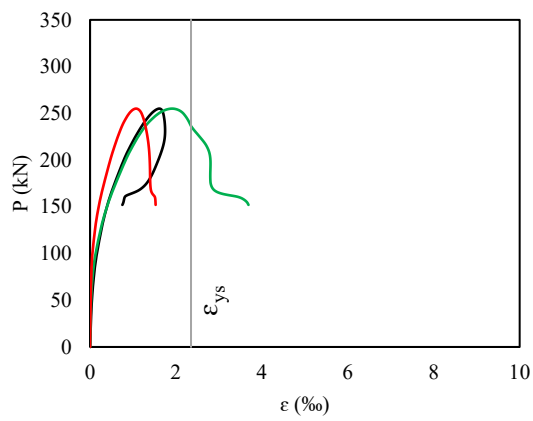


Figura 8.54 – Deformação da armadura secundária - L1C (MPa)

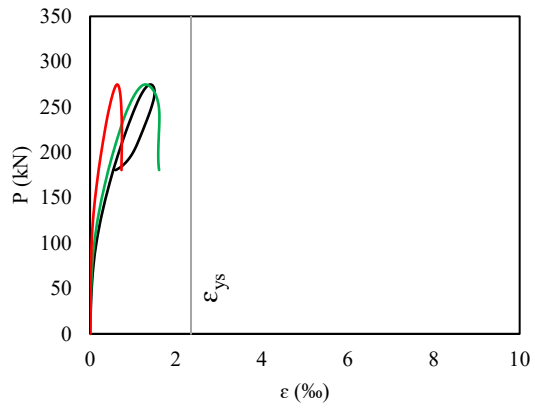


Figura 8.55 – Deformação da armadura secundária – L2C (MPa)

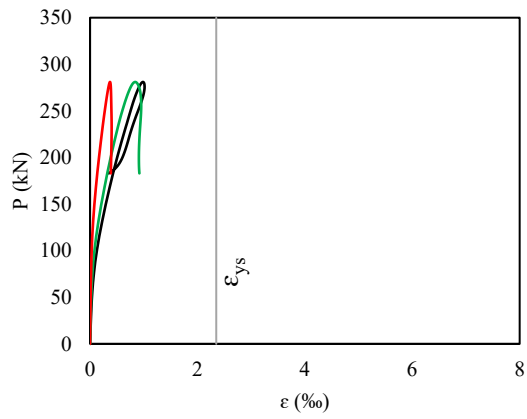


Figura 8.56 – Deformação da armadura secundária – L3C (MPa)

8.5.5. CONDIÇÃO DEFORMADA DAS LAJES

Nesta seção, são apresentadas as lajes em posição deformada ao nível do incremento de carregamento máximo obtido em simulação computacional de cada laje, respectivamente. O deslocamento máximo observado experimentalmente foi de aproximadamente 37 mm, enquanto o deslocamento numérico foi de aproximadamente 26 mm. É importante destacar que são resultados calibrados visando o comportamento conjunto carga \times deslocamento.

De forma global, nota-se a presença do comportamento unidirecional com concentração da flecha máxima no meio do vão, deslocamento das bordas livres e condição indeslocável das bordas apoiadas em todos os casos simulados, o que evidencia a correlação da modelagem computacional com os resultados experimentais, dadas as condições de contorno (Figura 8.55 - Figura 8.63).

Houve um aumento da região maciça deslocada, proporcional ao aumento do perímetro de controle dado pelos índices de retangularidade 1, 3 e 5, referentes aos grupos de pilar A, B e C respectivamente. Foram visualizadas diferenças de até 37 mm nas lajes com armadura de 0,59% (1) em relação às lajes com armadura de 2,1% (3), o que representa um aumento total de 25% nas flechas do grupo A e B, e 6,5% nas flechas do grupo C.

É percebido também aumentos do deslocamento vertical, juntamente com a carga última das lajes, devido ao efeito da taxa de armadura secundária quando esses aumentos são visualizados por grupos de mesmo índice de retangularidade de pilar. Isto se deve ao aumento da rigidez da placa que é proporcionado pela armadura secundária.

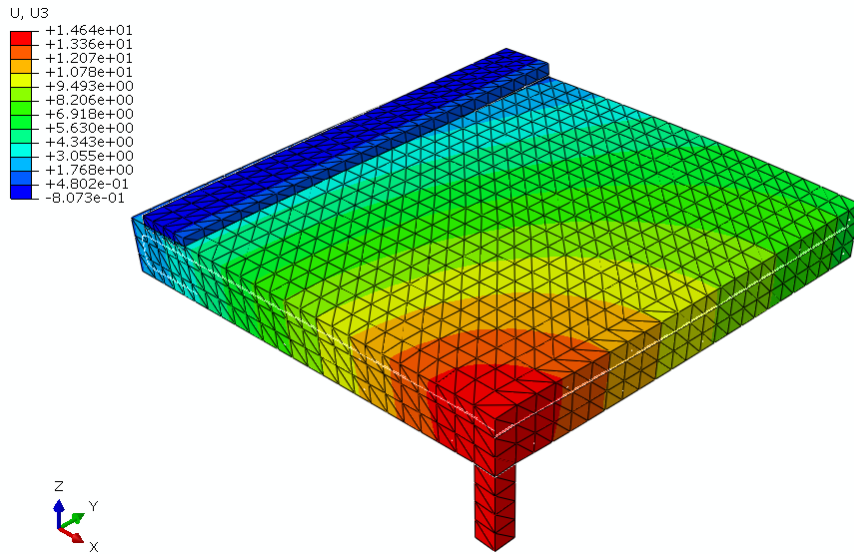


Figura 8.57 – Deformada - L1A (mm)

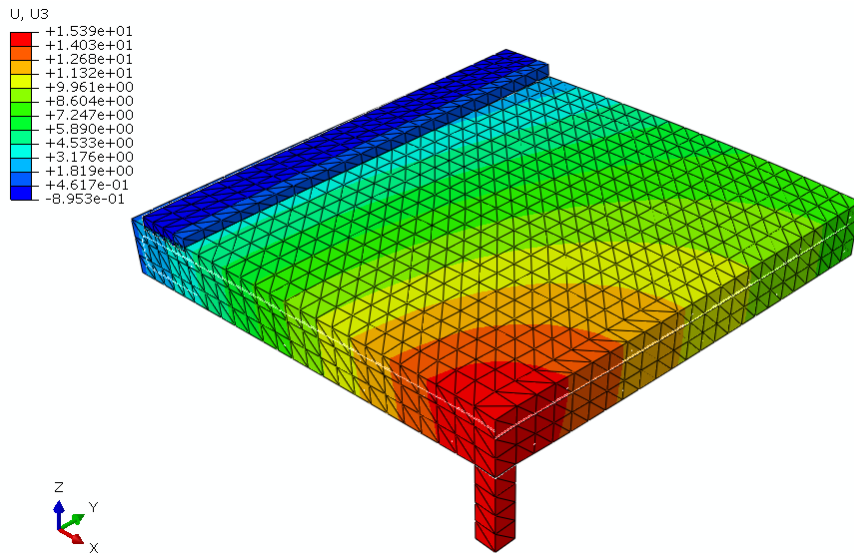


Figura 8.58 – Deformada – L2A (mm)

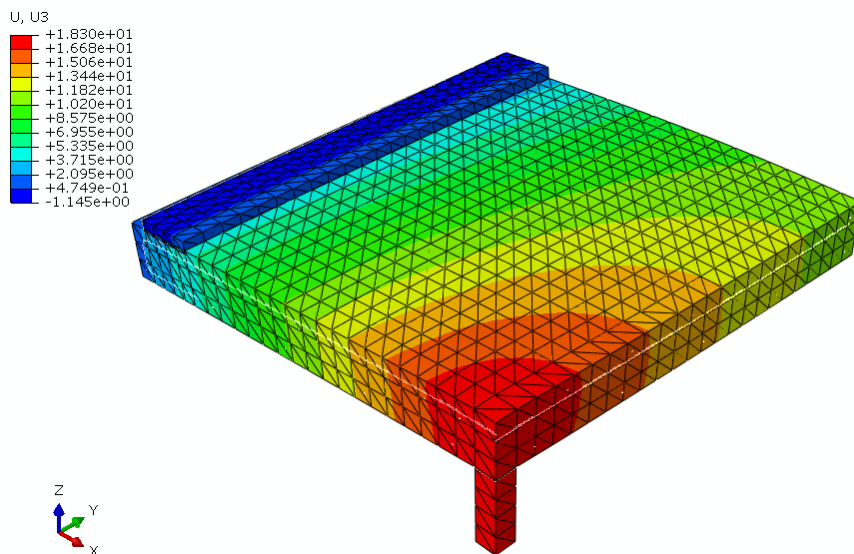


Figura 8.59 – Deformada – L3A (mm)

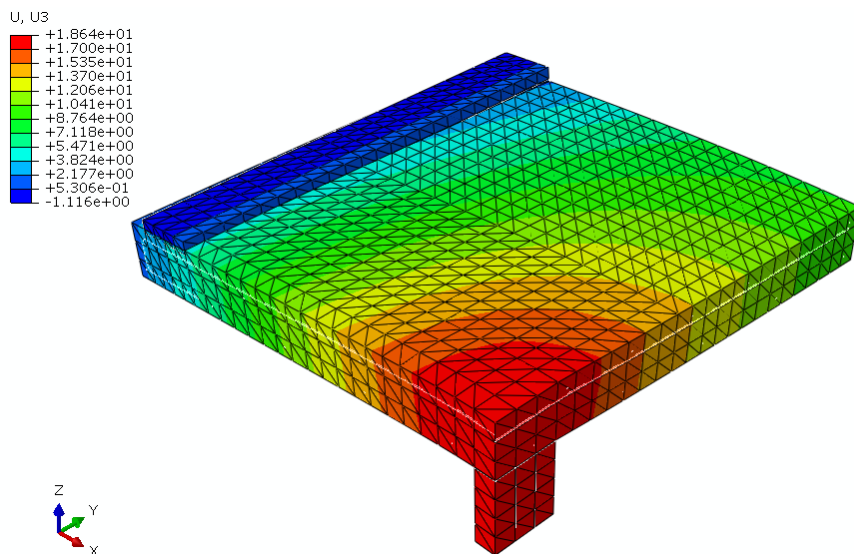


Figura 8.60 – Deformada - L1B (mm)

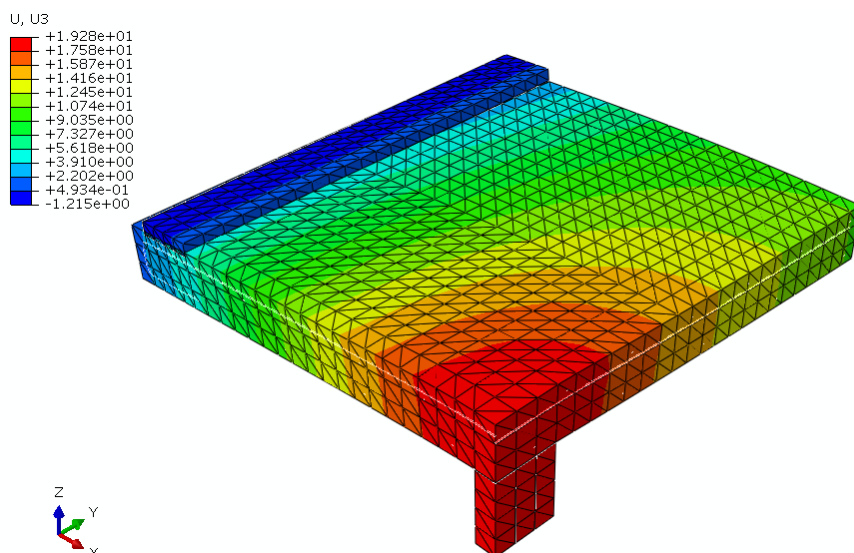


Figura 8.61 – Deformada – L2B (mm)

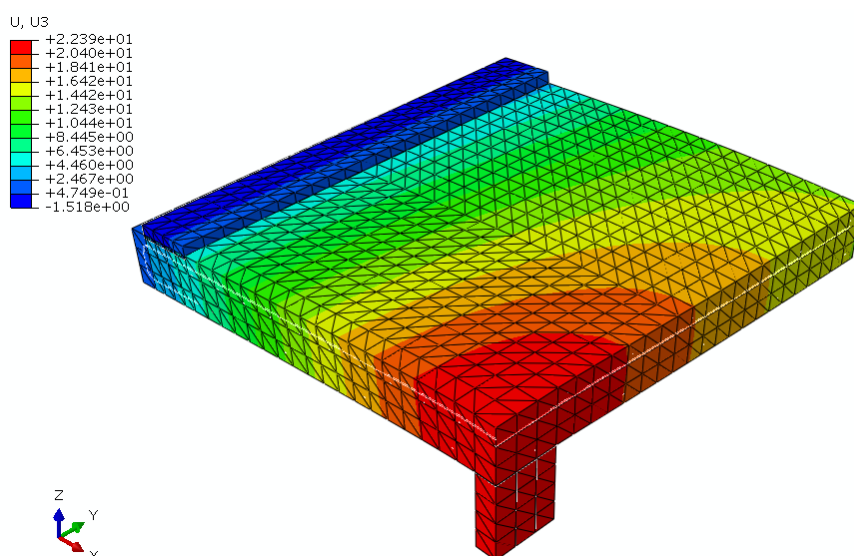


Figura 8.62 – Deformada – L3B (mm)

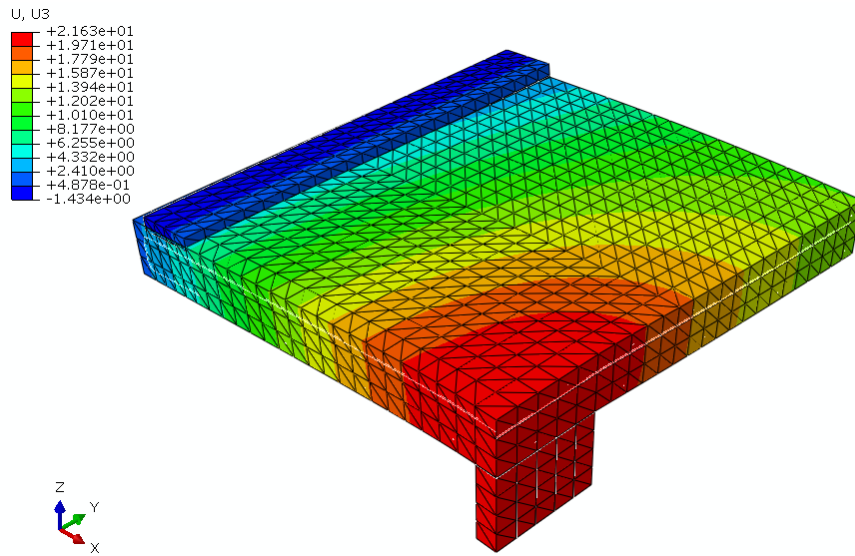


Figura 8.63 – Deformada - L1C (mm)

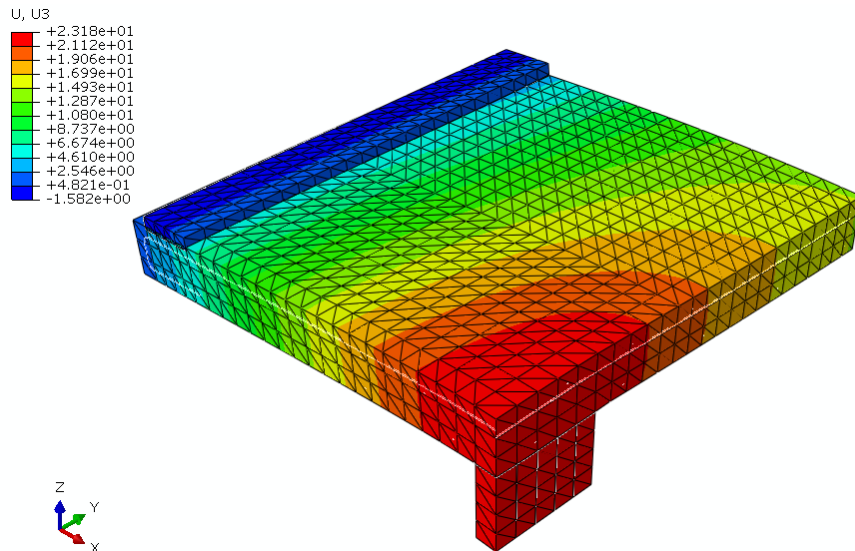


Figura 8.64 – Deformada – L2C (mm)

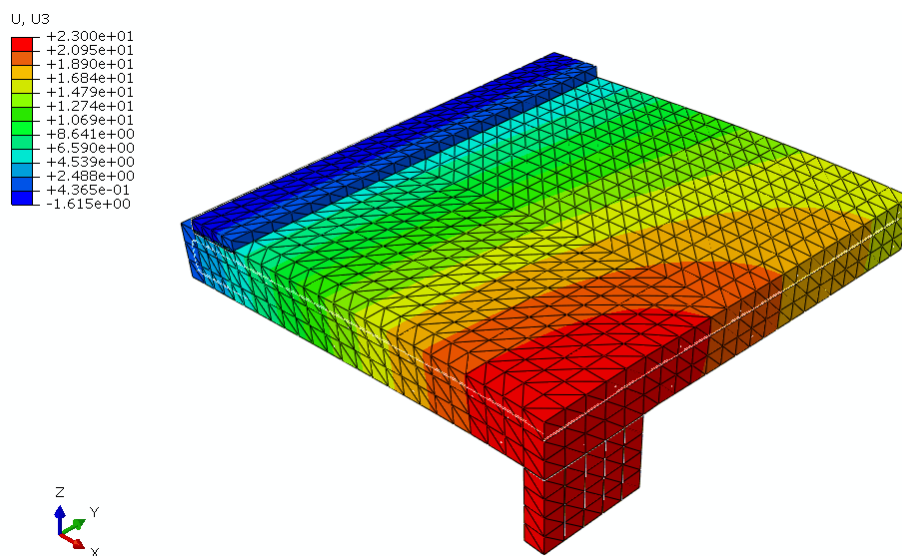


Figura 8.65 – Deformada – L3C (mm)

8.5.6. DESLOCAMENTOS VERTICAIS DAS LAJES

É visível a influência do índice de retangularidade dos pilares na carga última das lajes quando há um aumento do perímetro de controle. As lajes com pilares quadrados tendem a apresentar uma ruptura frágil mais precoce e menor aproveitamento das armaduras longitudinais, diferentemente de lajes com pilares alongados. Destacam-se a carga e rigidez máximas apresentadas pelas lajes do grupo C de pilar de (85×425) mm, o que corrobora o maior índice de retangularidade ($i = 5$) do pilar.

Sob uma nova ótica (a da taxa de armadura ρ), é oportunizada a visualização da influência da armadura secundária no desempenho de lajes unidirecionais de concreto armado ensaiadas à punção. No grupo A, é possível notar (Figura 8.64 - Figura 8.66) a boa correlação computacional \times experimental, o ganho de capacidade de carga de até 88 kN (ou 48%) e o comportamento altamente frágil sem modificação no modo de ruptura que ocorreu por punção ocorreu da mesma forma nas simulações computacionais e experimentais.

No grupo B, nota-se a correlação dos resultados apresentados com o ganho de capacidade de carga de até 50 kN (ou 23,0%) da laje L1B em relação à laje L3B, o que deixa clara a ruptura ainda brusca, porém com um comportamento pós-pico menos acentuado devido à ocorrência do escoamento de algumas barras de armadura longitudinal (Figura 8.67 - Figura 8.69).

No grupo C (Figura 8.70 - Figura 8.72), é observada a mudança para um comportamento mais dúctil dos modelos computacionais, assim como nos resultados experimentais, devido ao efeito do maior perímetro de controle ($i = 5$), que favorece a ruptura por flexão, mas ainda com ganho de capacidade de carga proporcionado pelo aumento da armadura secundária, conforme observado.

Desta forma, a contribuição da armadura secundária pode chegar a um aumento de 48,0% na carga última nos casos em que os valores da taxa secundária cheguem ao dobro dos valores da taxa principal. Esses achados estão de acordo com os resultados experimentais e são corroborados pelos resultados computacionais descritos nesta seção.

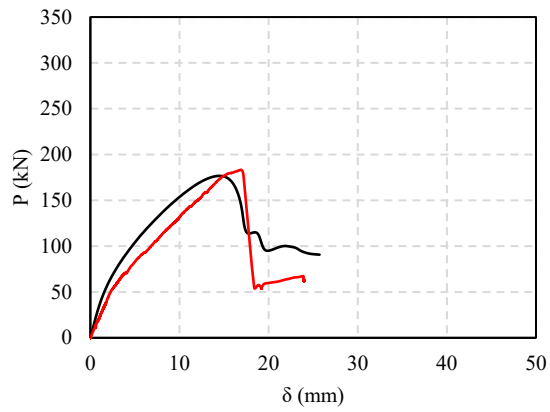


Figura 8.66 – Carga × Deslocamento – L1A (mm) – comp. – exp.

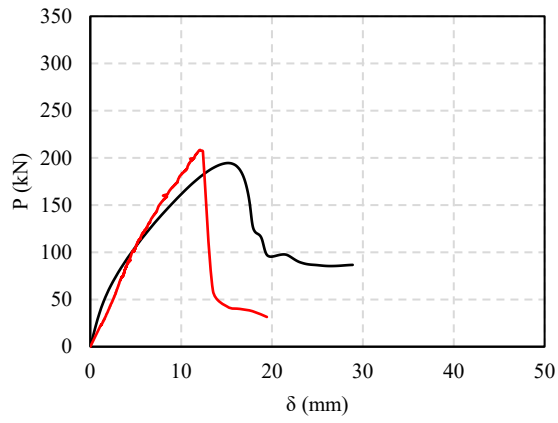


Figura 8.67 – Carga × Deslocamento – L2A (mm) – comp. – exp.

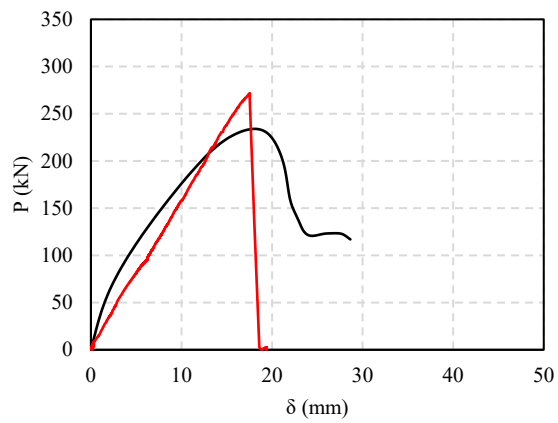


Figura 8.68 – Carga × Deslocamento – L3A (mm) – comp. – exp.

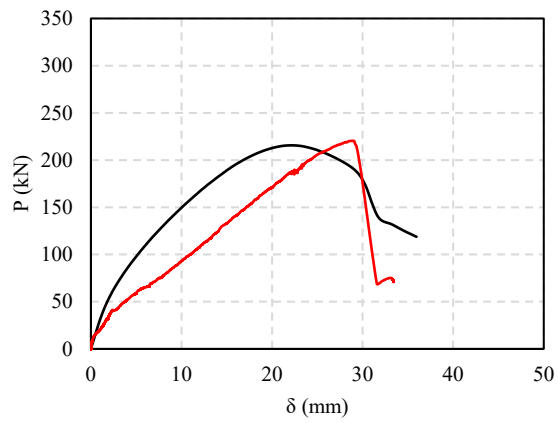


Figura 8.69 – Carga × Deslocamento – L1B (mm) – comp. – exp.

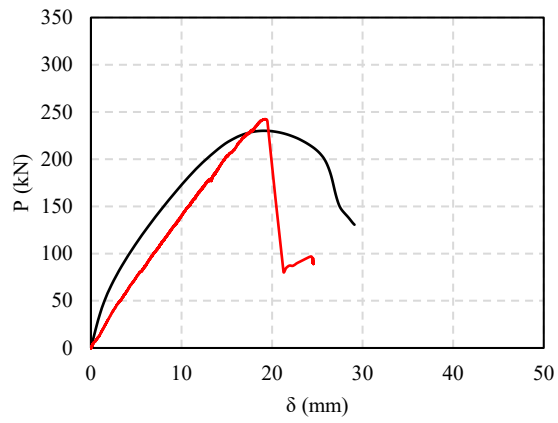


Figura 8.70 – Carga × Deslocamento – L2B (mm) – comp. – exp.

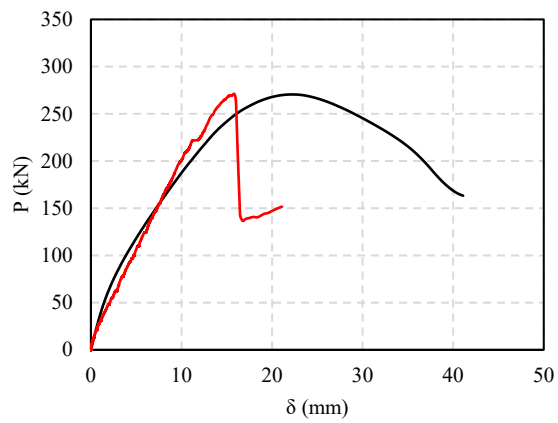


Figura 8.71 – Carga × Deslocamento – L3B (mm) – comp. – exp.

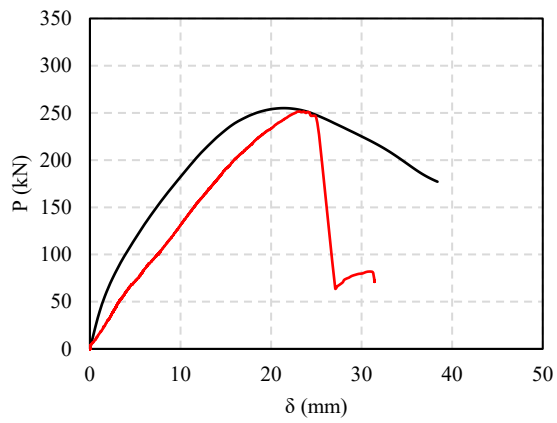


Figura 8.72 – Carga × Deslocamento – L1C (mm) – comp. – exp.

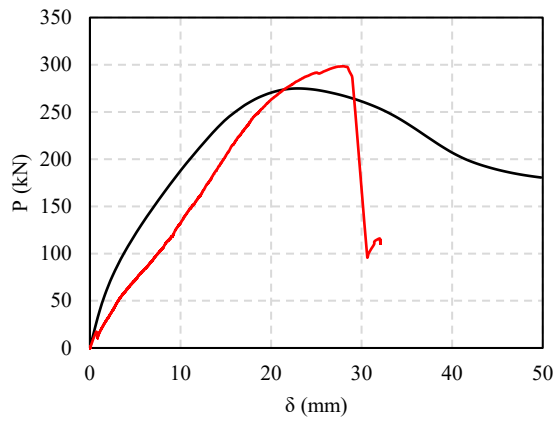


Figura 8.73 – Carga × Deslocamento – L2C (mm) – comp. – exp.

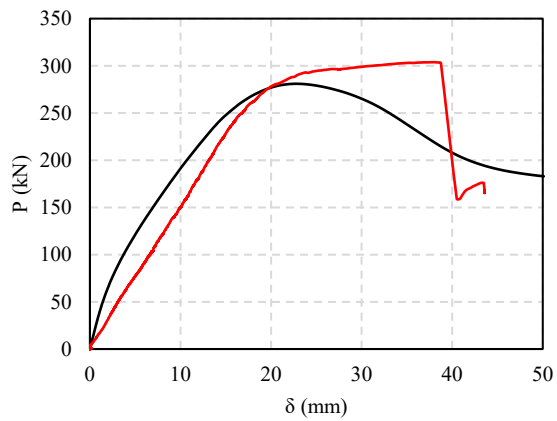


Figura 8.74 – Carga × Deslocamento – L3C (mm) – comp. – exp.

8.6. Análise dos resultados computacionais

A modelagem computacional apresentou resultados satisfatórios em relação às normas analisadas, validando o sistema de ensaio e mostrando a tendência das prescrições. Segundo a análise feita através do software ABAQUS/CAE 6.14, o ganho de capacidade de carga máxima apontada pelas lajes da série 3 e 4, reflete um provável patamar de contribuição da armadura transversal (secundária). É indiscutível o ganho de resistência quando há o aumento do índice de retangularidade dos pilares, em que se observa a tendência de redução dos efeitos do puncionamento devido ao aumento do perímetro crítico e , em menor proporção, porém ainda considerável, quando ocorre o aumento da taxa de armadura transversal devido o ganho de rigidez da laje.

O modelo de previsão computacional é considerado satisfatório, pois em sua maioria coincide com os demais resultados apresentados na seção anterior em relação às deformações das armaduras, plastificação do concreto e , ainda, na Tabela 8.3 desta seção. É importante destacar que apenas as lajes L2B e L3B não concordam com o modo de ruptura previsto, pois rompem (de acordo com o FEM-CDP) com uma carga maior que a carga de flexão (P_{flex}).

Tabela 8.3 – Carga última das lajes a partir da análise não linear

Laje	P_u (kN)	P_{NBR} (kN)	P_{ACI} (kN)	P_{EC2} (kN)	P_{MC10} (kN)	$P_{FEM-CDP}$ (kN)
L1A	183,3	159,8	108,8	127,8	115,3	176,7
L2A	208,4	176,9	108,8	141,5	115,3	194,6
L3A	271,7	197,4	108,8	157,9	115,3	233,9
L1B	220,4	197,1	135,0	157,6	178,6	215,6
L2B	242,5	218,3	135,0	174,6	178,6	230,1
L3B	271,2	243,5	135,0	194,7	178,6	270,5
L1C	251,5	234,4	150,7	187,4	241,9	255,0
L2C	298,4	259,7	150,7	207,6	241,9	274,9
L3C	303,9	289,7	150,7	231,6	241,9	280,9

Obs.: FEM-CDP se refere aos valores obtidos através do software ABAQUS; MC 2010 se refere aos valores calculados conforme prescrições da norma no modo de aproximação II.

Em relação às cargas obtidas pelo método computacional calibrado, este se mostra com boa precisão, com R^2 próximo de 1,0, e acurácia com MAPE abaixo de 10%; no entanto, a maioria das normas tende a superestimar a resistência média das lajes em 49%, aproximadamente. A MC 2010 é a norma com resultados mais dispersos e com baixa precisão, enquanto a norma ACI 318 tem a menor acurácia. A norma NBR 6118 apresentou a melhor média (1,15), desvio padrão (0,09) e coeficiente de variação (7,8%), porém MAPE ainda maior que 10% em relação aos resultados experimentais, perdendo apenas para as previsões computacionais (Tabela 8.4).

Estes resultados indicam a real necessidade de uma proposta teórica sobre o comportamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com diferentes taxas de armadura secundária e pilares retangulares.

Tabela 8.4 – Comparação das cargas últimas a partir da análise não linear

Laje	P_u/P_{NBR}	P_u/P_{ACI}	P_u/P_{EC2}	P_u/P_{MC10}	$P_u/P_{MEF-CDP}$
L1A	1,15	1,68	1,43	1,59	1,04
L2A	1,18	1,92	1,47	1,81	1,07
L3A	1,38	2,50	1,72	2,36	1,16
L1B	1,12	1,63	1,40	1,23	1,02
L2B	1,11	1,80	1,39	1,36	1,05
L3B	1,11	2,01	1,39	1,52	1,00
L1C	1,07	1,67	1,34	1,04	0,99
L2C	1,15	1,98	1,44	1,23	1,09
L3C	1,05	2,02	1,31	1,26	1,08
Média	1,15	1,91	1,43	1,49	1,06
DP	0,09	0,27	0,12	0,40	0,05
CV	7,80	13,96	8,27	26,77	4,97
R^2	0,82	0,43	0,82	0,45	0,90
MAPE	12,27	46,85	29,85	29,10	5,39

8.7. Banco de dados computacional

Para aplicação de regressão não linear e criação de um modelo de previsão inicial desta pesquisa, foram modeladas 40 lajes lisas de concreto armado, das quais 9 (nove) também experimentais, para a construção de um banco de dados (BD) numérico-computacional validado que possa exprimir o comportamento de um grupo de lajes com armadura secundária e índice de retangularidade variáveis, de forma a extrapolar as séries de variáveis estudadas em laboratório (taxa ρ e índice i) – sumariamente apresentadas na Tabela 8.5 - com seus respectivos resultados de carga última (P_u) e modo de ruptura.

Deste modo, foram extrapolados índice de retangularidade para 7 ($i = 7$) compondo o grupo denominado D, taxa de armadura secundária para 0 e 3,39% ($\rho = 0$; $\rho = 3,39\%$) compondo os grupos 0 e 4, e taxa de armadura principal para 1,53 % ($\rho = 1,53\%$) como grupo X.

Todas as lajes foram modeladas e simuladas com os mesmos parâmetros e leis constitutivas aplicadas e calibradas para a laje L1A.

Tabela 8.5 – Modelos computacionais realizados

Laje	d_s (mm)	d_p (mm)	ρ_y (%)	ρ_x (%)	\emptyset_s (mm)	\emptyset_p (mm)	a (mm)	b (mm)	P_u (kN)	Modo
L0A	82,50	95,00	0,00	0,93	0,00	13 Ø 12,5	85,00	85,00	135,36	P
L1A	82,50	95,00	0,59	0,93	7 Ø 12,5	13 Ø 12,5	85,00	85,00	176,71	P
L2A	82,50	95,00	1,09	0,93	13 Ø 12,5	13 Ø 12,5	85,00	85,00	194,55	P
L3A	82,50	95,00	2,10	0,93	25 Ø 12,5	13 Ø 12,5	85,00	85,00	233,98	FP
L4A	82,50	95,00	3,39	0,93	25 Ø 16	13 Ø 12,5 mm	85,00	85,00	239,52	F
L0B	82,50	95,00	0,00	0,93	0,00	13 Ø 12,5 mm	85,00	255,00	167,22	P
L1B	82,50	95,00	0,59	0,93	7 Ø 12,5	13 Ø 12,5 mm	85,00	255,00	215,61	P
L2B	82,50	95,00	1,09	0,93	13 Ø 12,5	13 Ø 12,5 mm	85,00	255,00	230,05	F
L3B	82,50	95,00	2,10	0,93	25 Ø 12,5	13 Ø 12,5 mm	85,00	255,00	270,49	F
L4B	82,50	95,00	3,39	0,93	25 Ø 16	13 Ø 12,5 mm	85,00	255,00	274,00	F
L0C	82,50	95,00	0,00	0,93	0,00	13 Ø 12,5 mm	85,00	425,00	215,83	P
L1C	82,50	95,00	0,59	0,93	7 Ø 12,5	13 Ø 12,5 mm	85,00	425,00	255,02	F
L2C	82,50	95,00	1,09	0,93	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	425,00	274,90	F
L3C	82,50	95,00	2,10	0,93	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	425,00	280,97	F
L4C	82,50	95,00	3,39	0,93	25 Ø 16 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	425,00	297,79	F
L0D	82,50	95,00	0,00	0,93	0,00	13 Ø 12,5 mm	85,00	595,00	239,53	FP
L1D	82,50	95,00	0,59	0,93	7 Ø 12,5 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	595,00	267,35	F
L2D	82,50	95,00	1,09	0,93	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	595,00	296,30	F
L3D	82,50	95,00	2,10	0,93	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	595,00	302,67	F
L4D	82,50	95,00	3,39	0,93	25 Ø 16 mm	13 Ø 12,5 mm	85,00	595,00	304,35	F
L0AX	82,50	95,00	0,00	1,53	0,00	13 Ø 16 mm	85,00	85,00	142,49	P
L1AX	82,50	95,00	0,59	1,53	7 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	85,00	192,40	P
L2AX	82,50	95,00	1,09	1,53	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	85,00	215,49	P
L3AX	82,50	95,00	2,10	1,53	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	85,00	249,16	P
L4AX	82,50	95,00	3,39	1,53	25 Ø 16 mm	13 Ø 16 mm	85,00	85,00	273,43	P
L0BX	82,50	95,00	0,00	1,53	0,00	13 Ø 16 mm	85,00	255,00	177,14	P
L1BX	82,50	95,00	0,59	1,53	7 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	255,00	246,25	P
L2BX	82,50	95,00	1,09	1,53	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	255,00	273,75	P
L3BX	82,50	95,00	2,10	1,53	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	255,00	323,57	P
L4BX	82,50	95,00	3,39	1,53	25 Ø 16 mm	13 Ø 16 mm	85,00	255,00	335,05	FP
L0CX	82,50	95,00	0,00	1,53	0,00	13 Ø 16 mm	85,00	425,00	235,23	P
L1CX	82,50	95,00	0,59	1,53	7 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	425,00	307,86	P
L2CX	82,50	95,00	1,09	1,53	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	425,00	330,75	FP
L3CX	82,50	95,00	2,10	1,53	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	425,00	351,71	F
L4CX	82,50	95,00	3,39	1,53	25 Ø 16 mm	13 Ø 16 mm	85,00	425,00	360,42	F
L0DX	82,50	95,00	0,00	1,53	0,00	13 Ø 16 mm	85,00	595,00	267,87	P
L1DX	82,50	95,00	0,59	1,53	7 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	595,00	333,79	FP
L2DX	82,50	95,00	1,09	1,53	13 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	595,00	382,93	F
L3DX	82,50	95,00	2,10	1,53	25 Ø 12,5 mm	13 Ø 16 mm	85,00	595,00	371,46	F
L4DX	82,50	95,00	3,39	1,53	25 Ø 16 mm	13 Ø 16 mm	85,00	595,00	378,85	F

As primeiras 20 (vinte) lajes deste *bd* foram aquelas com armadura principal constante de 0,93% (13 Ø 12,5 mm), e índices de retangularidade e taxa de armadura secundária variáveis. Conforme mostrado pela Figura 8.73, é clara a contribuição da taxa de armadura secundária em grupos de lajes da mesma tipologia de pilar. Este ganho atinge o valor máximo de aproximadamente 64% nas lajes de pilar B (85 × 255 mm – $i = 3$), inclusive com mudança de modo de ruptura de punção para flexão (Figura 8.74).

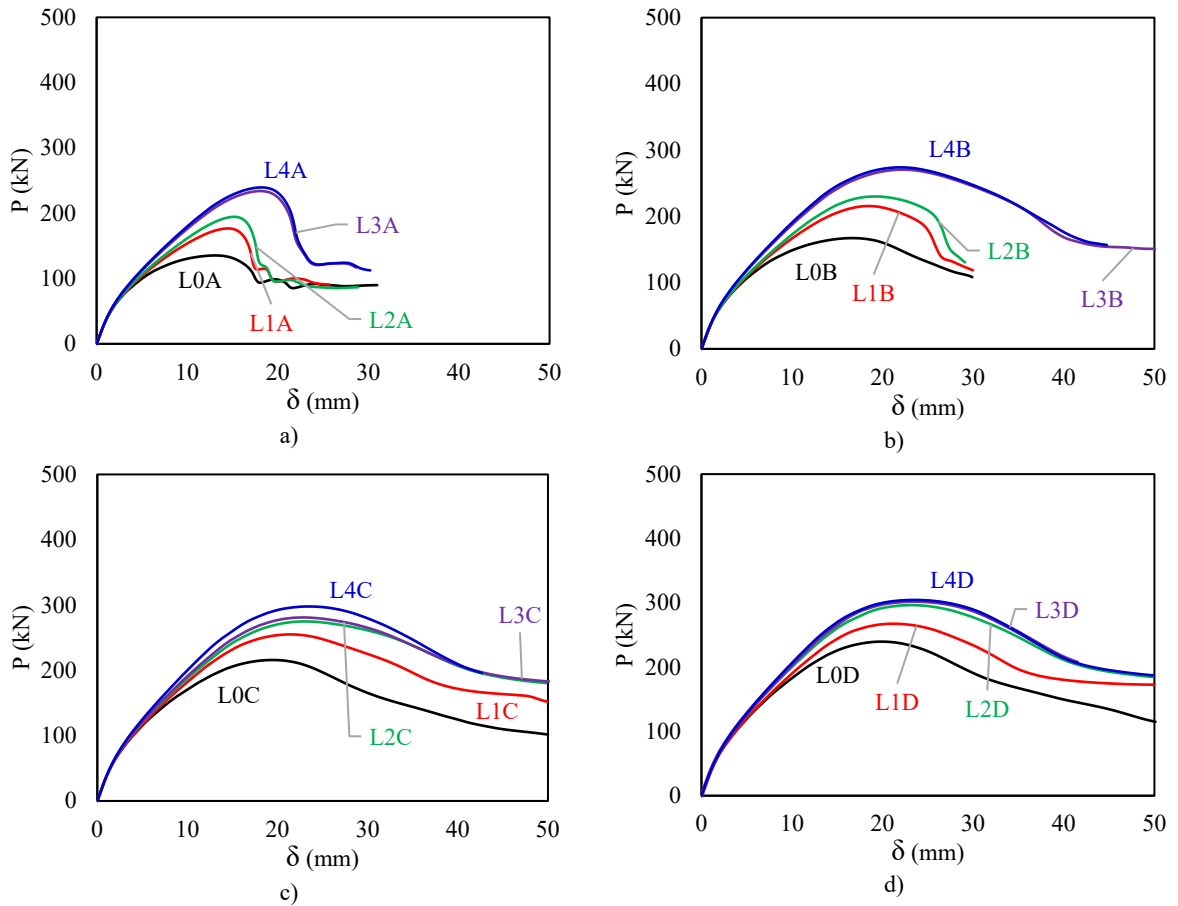


Figura 8.75 – Comportamento das lajes da série $\rho_x = 0,93\%$ (FEM-CDP)

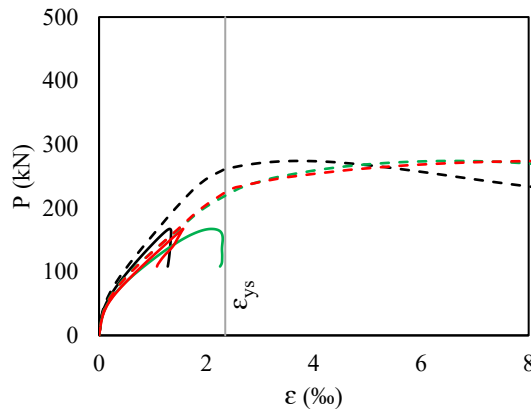


Figura 8.76 – Comportamento das armaduras principais da laje L0B (—) e L4B (- - -) (FEM-CDP)

As últimas 20 lajes deste *bd* foram as de armadura principal constante de 1,53 % (13 Ø 16 mm) e índices de retangularidade e taxa de armadura secundária variáveis. Continua destacada a contribuição da taxa de armadura secundária na resistência ao puncionamento de todas as séries de lajes lisas unidirecionais de concreto armado, havendo o máximo de aproximadamente 89% de ganho de resistência da laje L0BX em relação a laje L4BX de pilar tipo B (85 × 255 mm – *i* = 3), segundo Figura 8.75. Notada ainda a mudança de modo de ruptura de punção para flexão, segundo mostra a Figura 8.76.

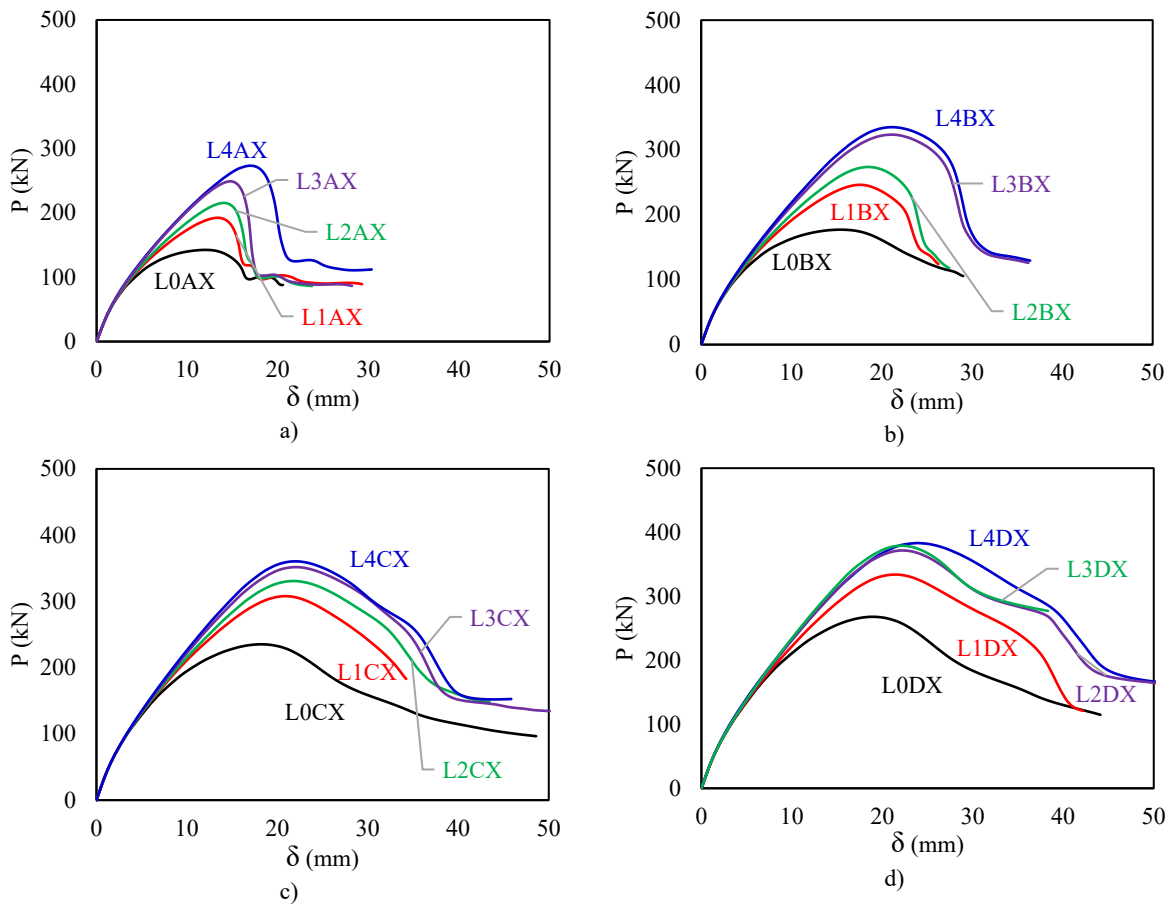


Figura 8.77 – Comportamento das lajes da série $\rho_x = 1,53\%$ (FEM-CDP)

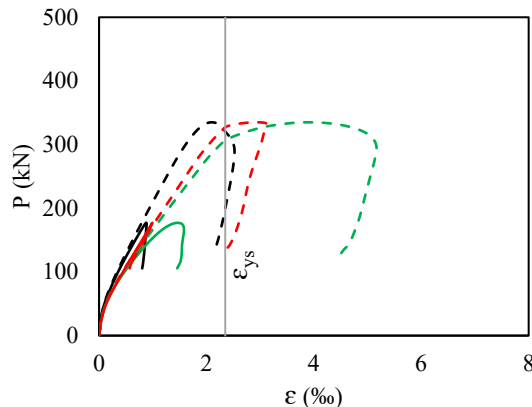


Figura 8.78 – Comportamento das armaduras principais da laje L0BX (—) e L4BX (---) (FEM-CDP)

Em seguida, foi realizada uma análise do efeito das variáveis ρ e i no desempenho das lajes deste bd . Conforme pode ser visto, tanto carga última quanto tensão admissível das lajes recebem um acréscimo de resistência proporcional ao aumento da taxa de armadura secundária até um limite de aproximadamente 2%, o que mostra forte correlação e concorda com o resultado verificado pelo código EC2 (2004), que limita a taxa de armadura longitudinal também a aproximadamente 2%. Para taxas acima deste limite natural, os ganhos de resistência se tornam insignificantes (Figura 8.77).

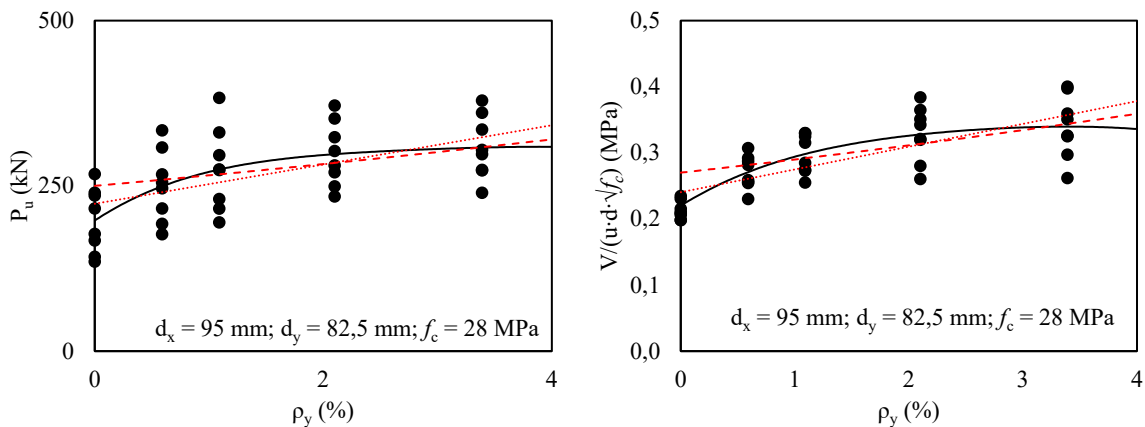


Figura 8.79 – Influência de ρ_y na carga última e na tensão das lajes computacionais

Em relação ao índice de retangularidade, é percebido que este aumenta a carga última com maior intensidade em índices de 2 até 5. A tensão admissível, por outro lado, tende a diminuir como consequência do aumento do perímetro de controle (u_1), que cresce proporcionalmente ao índice de retangularidade (Figura 8.78).

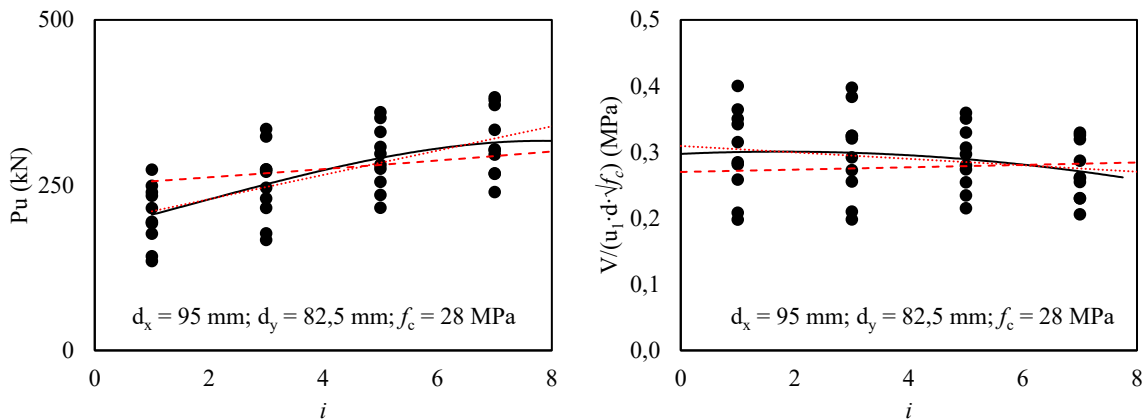


Figura 8.80 – Influência de i em carga última e tensão das lajes computacionais

9. BANCO DE DADOS EXPERIMENTAL

O concreto convencional é hoje um dos materiais mais utilizados na construção civil, devido ao baixo custo e a capacidade de se acomodar a distintas condições de produção, muito embora ainda possua algumas deficiências, por exemplo, a dificuldade de ocupar totalmente peças esbeltas densamente armadas e a baixa ductilidade, as quais são causas de várias patologias.

Dentre os diversos usos e aplicações do concreto convencional, encontra-se a ligação laje-pilar denominada laje lisa. As lajes lisas podem ser consideradas como uma alternativa para edifícios de concreto, uma vez que permitem maior agilidade ao processo construtivo devido à simplificação das formas e armaduras do pavimento. Além disso, reduzem custos com mão de obra e fornecem versatilidade aos espaços construídos dos pavimentos.

O dimensionamento de lajes lisas é feito utilizando-se recomendações apresentadas por normas técnicas para projeto de estruturas de concreto, as quais são fundamentalmente empíricas e cujos resultados tendem a apresentar discrepâncias. Podem ser calculadas com ou sem armaduras de cisalhamento; neste último caso, comportam-se de maneira frágil e podem apresentar ruptura por punção com carga inferior à de flexão. Nessas situações, a resistência ao cisalhamento é um fator importante na verificação deste tipo de estrutura, sendo preponderante na escolha da espessura da laje, geometria dos pilares, resistência à compressão do concreto e escolha do uso da armadura de cisalhamento.

A previsão da carga última de lajes lisas sem armadura de punção, segundo várias normas ([NBR 6118](#), [EC 2](#), [MC 2010](#) e [ACI 318](#)), pode ser feita pelo cálculo da tensão nominal de cisalhamento que atua em uma dada superfície de controle, a qual pode ser chamada de superfície crítica, comparada à resistência ao cisalhamento do concreto por si só. Já nas lajes com armadura de cisalhamento, a previsão da carga de ruptura é dada pela soma das contribuições do concreto e do aço entre si.

Assim, torna-se de grande importância avaliar os códigos normativos afim de proporcionar índices quantitativos e qualitativos em relação à segurança de tais estruturas, através do concreto, que é o meio aglomerante e ponto de maior fragilidade no tipo de ruptura por punção.

9.1. Banco de dados Experimental

Para executar o teste e validar o modelo de previsão estabelecido desta pesquisa, este capítulo tem como objetivo avaliar criteriosamente os resultados teóricos confrontados pelos resultados experimentais de lajes lisas unidirecionais de concreto armado sem armaduras de punção e com diferentes taxas de armadura longitudinal secundária, cuidadosamente selecionadas para compor um banco de dados com espécimes de variação significativa de parâmetros como altura útil, taxa de armadura de flexão, resistência do concreto e índice de retangularidade dos pilares. Todas as lajes tiveram relação $a/d > 2,5$ (para que não haja influência da transferência direta da carga para o apoio) e foram carregadas simetricamente e apoiadas sobre um único pilar interno (central).

As seguintes colunas podem ser encontradas no banco de dados:

l_x	comprimento do vão ensaiado;
l_y	comprimento perpendicular ao vão ensaiado;
a	distância do eixo da carga ao eixo do apoio;
f_{ys}	tensão de escoamento do aço;
f_c	resistência à compressão do concreto;
E_s	Módulo de elasticidade do aço;
a	distância de eixo a eixo da carga ao apoio;
$C_{máx}$	maior dimensão do pilar;
$C_{mín}$	menor dimensão do pilar;
ρ_x	taxa de armadura longitudinal na direção principal;
ρ_y	taxa de armadura longitudinal na direção secundária;
d_p	altura útil na direção principal;
d_s	altura útil na direção secundária;
P_u	carga última de ruptura da laje.

Modos de ruptura observados:

VC	viga chata;
P	puncionamento;
FP	flexo-puncionamento;
F	flexão.

Os dados foram obtidos a partir dos trabalhos de [Richart e Kluge \(1939\)](#), [Coin e Thonier \(2007\)](#), [Oliveira \(2003\)](#), [Hawkin, Falssen e Hinojosa \(1971\)](#), [Regan e Rezai-Jorabi \(1988\)](#), [Ferreira \(2006\)](#), [Carvalho \(2006\)](#), [Vilhena et al. \(2006\)](#) e [Damasceno \(2007\)](#). Todas essas pesquisas são experiências relevantes da literatura e em que os resultados de pequenos espécimes podem não ser totalmente representativos para as estruturas existentes devido ao *size effect* no cisalhamento, o que leva a capacidades de cisalhamento relativamente menores para maiores alturas da seção.

O banco de dados mostra concentração de pontos na região com baixa altura útil de seção transversal e uma taxa de armadura relativamente grande, como observado em outros bancos de dados de cisalhamento disponíveis. Ao se comparar os resultados de um banco de dados com as normas sugeridas, a variabilidade das propriedades dos materiais deve ser levada em conta. [Reineck \(1997\)](#) aponta que diferentes corpos de prova podem apresentar diferenças na resistência à tração de mais de 20% e até 30%. Portanto, dispersão semelhante pode ser esperada em experimentos de cisalhamento.

Desta forma, apresenta-se o banco de dados de 38 lajes compiladas por meio de uma revisão bibliográfica da literatura nacional e internacional, tendo como principal conteúdo as características dos ensaios de inúmeras lajes solicitadas por uma carga central (pilar interno retangular), bem como suas propriedades físicas e geométricas gerais. Além disso, são descritos os resultados experimentais de lajes ensaiadas à punção com variáveis diversas, tendo característica comum a todos os ensaios a presença da armadura de flexão com taxa mínima de 0,28%, conforme apresenta a Tabela 9.1.

A menor espessura das lajes apresentadas foi de 65 mm. Esse valor é menor que o mínimo requerido por algumas normas, incluindo a [NBR 6118 \(2014\)](#), para lajes lisas, que é de 160 mm. Ainda assim, são valores aceitos, devido à existência de poucos resultados deste tipo de laje constante na literatura, e também pelo fato de que essa prescrição normativa leva em conta a relação a/d e flechas máximas em serviço que não são restritas em laboratório.

Tabela 9.1 – Banco de dados de lajes lisas unidirecionais de concreto armado

Autor	Laje	L _X (mm)	L _Y (mm)	a (mm)	d _s (mm)	ρ _s (%)	d _p (mm)	ρ _p (%)	f _c (MPa)	f _{ys} (MPa)	E _s (MPa)	C _{máx} (mm)	C _{mín} (mm)	P _u (kN)	Modo
1	S1-2	500,00	3096,00	250,00	127,00	0,98	140,00	0,91	25,60	305,00	200000,00	152,00	152,00	278,00	P
	S1-3	500,00	3096,00	250,00	127,00	0,98	140,00	0,91	25,60	305,00	200000,00	152,00	152,00	318,00	P
2	1	680,00	2500,00	340,00	74,00	1,10	85,00	1,07	25,80	530,00	200000,00	1000,00	200,00	257,00	VC
	2	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,30	85,00	1,59	30,40	530,00	200000,00	1000,00	200,00	272,00	VC
	5	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,42	85,00	2,15	30,20	510,00	200000,00	1000,00	200,00	306,00	P
	5bis	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,42	85,00	2,15	30,20	510,00	200000,00	1000,00	200,00	312,00	P
	6bis	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,42	85,00	1,66	30,20	550,00	200000,00	700,00	200,00	250,00	P
	7	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,42	85,00	1,26	19,20	550,00	200000,00	400,00	200,00	165,00	VC
	7bis	680,00	2500,00	340,00	77,00	0,42	85,00	1,26	19,20	550,00	200000,00	400,00	200,00	151,00	VC
3	L1b	1480,00	2280,00	740,00	90,00	1,08	108,00	1,08	59,20	749,00	234000,00	120,00	120,00	322,00	P
	L2b	1480,00	2280,00	740,00	90,00	1,10	106,00	1,10	57,70	749,00	234000,00	240,00	120,00	361,00	P
	L3b	1480,00	2280,00	740,00	90,00	1,09	107,00	1,09	59,40	749,00	234000,00	360,00	120,00	400,00	P
	L4b	1480,00	2280,00	740,00	90,00	1,10	106,00	1,10	54,30	749,00	234000,00	480,00	120,00	395,00	P
	L5b	1480,00	2280,00	740,00	90,00	1,08	108,00	1,08	67,00	749,00	234000,00	600,00	120,00	426,00	P
4	1	1900,00	2100,00	950,00	117,30	1,12	117,30	1,12	30,90	419,00	200000,00	305,00	305,00	391,00	F
	5	1900,00	2100,00	950,00	117,30	1,12	117,30	1,12	27,40	419,00	200000,00	457,00	152,00	362,00	P
	6	1900,00	2100,00	950,00	117,30	1,12	117,30	1,12	23,10	419,00	200000,00	457,00	152,00	342,00	P
5	14R	900,00	800,00	450,00	70,00	0,60	79,00	1,54	31,00	670,00	200000,00	75,00	100,00	77,00	P
	15R	900,00	800,00	450,00	70,00	0,60	79,00	1,54	30,80	670,00	200000,00	150,00	100,00	86,00	P
	17R	900,00	1000,00	450,00	70,00	0,60	79,00	1,51	31,00	670,00	200000,00	600,00	100,00	137,50	VC
	19R	900,00	1000,00	450,00	70,00	0,60	79,00	1,51	29,00	670,00	200000,00	150,00	100,00	85,00	P
6	L1a	1600,00	1800,00	800,00	87,00	0,94	87,00	1,48	42,40	488,00	220000,00	85,00	85,00	174,00	P
	L1b	1600,00	1800,00	800,00	87,00	1,18	89,00	1,48	51,40	488,00	220000,00	85,00	85,00	231,50	FP
	L1c	1600,00	1800,00	800,00	80,00	1,48	87,00	1,48	43,50	488,00	220000,00	85,00	85,00	190,00	P
7	L1	1600,00	1800,00	800,00	85,00	1,32	90,00	1,32	52,50	676,00	646000,00	85,00	85,00	185,00	P
	L2	1600,00	1800,00	800,00	85,00	1,32	90,00	1,32	51,90	676,00	646000,00	255,00	85,00	226,00	P
	L3	1600,00	1800,00	800,00	85,00	1,32	90,00	1,32	49,60	676,00	646000,00	425,00	85,00	239,00	P

Autor	Laje	L _X (mm)	L _Y (mm)	a (mm)	d _s (mm)	ρ _s (%)	d _p (mm)	ρ _p (%)	f _c (MPa)	f _{ys} (MPa)	E _s (MPa)	C _{máx} (mm)	C _{mín} (mm)	P _u (kN)	Modo
8	L1A	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,20	65,00	1,20	27,40	773,00	259000,00	85,00	85,00	123,00	P
	L1B	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,90	65,00	1,20	27,40	773,00	259000,00	85,00	85,00	122,00	P
	L3A	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,20	65,00	1,20	32,40	773,00	259000,00	255,00	85,00	134,50	FP
	L3B	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,90	65,00	1,20	32,40	773,00	259000,00	255,00	85,00	134,00	FP
	L5A	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,20	65,00	1,20	30,90	773,00	259000,00	425,00	85,00	122,00	P
	L5B	1200,00	1000,00	600,00	60,00	1,90	65,00	1,20	30,90	773,00	259000,00	425,00	85,00	124,50	P
9	L1A	1600,00	1800,00	800,00	79,00	1,22	89,00	1,22	41,30	600,00	240000,00	85,00	85,00	188,50	P
	L2A	1600,00	1800,00	800,00	79,00	1,22	89,00	1,22	40,00	600,00	240000,00	255,00	85,00	254,00	FP
	L3A	1600,00	1800,00	800,00	89,00	1,09	99,00	1,09	39,70	600,00	240000,00	425,00	85,00	297,00	F
	L4A	1600,00	1800,00	800,00	89,00	1,11	99,00	1,11	40,40	600,00	240000,00	595,00	85,00	325,00	F
	L1B	1600,00	1800,00	800,00	88,00	0,28	98,00	1,11	41,40	600,00	240000,00	85,00	85,00	172,00	P
	L2B	1600,00	1800,00	800,00	81,00	0,31	91,00	1,21	42,00	600,00	240000,00	255,00	85,00	194,50	P
	L3B	1600,00	1800,00	800,00	83,00	0,30	93,00	1,18	41,60	600,00	240000,00	425,00	85,00	232,00	FP
	L4B	1600,00	1800,00	800,00	98,00	0,28	98,00	1,11	40,50	600,00	240000,00	595,00	85,00	254,50	FP
10	L1A	1600,00	1800,00	800,00	82,50	0,59	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	85,00	85,00	183,29	P
	L1B	1600,00	1800,00	800,00	82,50	0,59	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	255,00	85,00	220,40	P
	L1C	1600,00	1800,00	800,00	82,50	0,59	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	425,00	85,00	251,51	FP
	L2A	1600,00	1800,00	800,00	82,50	1,09	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	85,00	85,00	208,38	P
	L2B	1600,00	1800,00	800,00	82,50	1,09	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	255,00	85,00	242,48	P
	L2C	1600,00	1800,00	800,00	82,50	1,09	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	425,00	85,00	298,38	F
	L3A	1600,00	1800,00	800,00	82,50	2,10	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	85,00	85,00	271,69	P
	L3B	1600,00	1800,00	800,00	82,50	2,10	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	255,00	85,00	271,20	FP
	L3C	1600,00	1800,00	800,00	82,50	2,10	95,00	0,93	28,00	573,00	243830,00	425,00	85,00	303,86	F

Legenda de autores: 1- Richart e Kluge (1939); 2- Coin e Thonier (2007); 3 - Oliveira (2003); 4 - Hawkins et al. (1971); 5 - Regan e Rezai-Jorabi (1988); 6 - Ferreira (2006); 7 - Carvalho (2006); 8 - Vilhena et al. (2006); 9 - Damasceno (2007); 10 - Lajes desta pesquisa (2022).

9.2. Análise das Normas

São apresentados e discutidos os resultados das previsões teóricas da carga característica de ruptura por punção através das normas [EC 2](#), [MC 2010](#), [ACI 318](#) e [NBR 6118](#), apresentadas no capítulo 3.3, em comparação à carga verificada experimentalmente através do BD experimental.

Este estudo paramétrico é levado a investigar quais são as normas mais precisas para o cálculo da resistência ao funcionamento de lajes lisas unidirecionais sem armadura de cisalhamento, com carga concentrada e pilares de centro retangulares de acordo com as normas supracitadas. Os vãos variaram entre 500 e 3000 mm e os pilares retangulares de maior lado tiveram variação entre 85 e 1000 mm. As resistências características dos materiais oscilaram entre 25 e 67 MPa para concretos, e 305 e 773 MPa para armaduras. A espessura das lajes variou entre 79 e 140 mm.

A presente análise faz os apontamentos em termos de nível de conservadorismo e insegurança das propostas estabelecidas anteriormente para descrever o critério de ruína de lajes lisas unidirecionais sem armadura de cisalhamento. Para tal propósito, é julgado o parâmetro λ , que relaciona os resultados experimentais e teóricos (P_u/P_{normas}). Os valores de λ serão avaliados segundo uma adaptação do critério de penalidade proposto por [Collins \(2001\)](#), o Demerit Points Classification – DPC (Tabela 9.2). Nas análises, as normas são designadas, respectivamente, pela sua nomenclatura oficial. Os resultados teóricos e experimentais, que definem o parâmetro λ , foram obtidos pelos métodos de cálculo das mesmas normas, conforme apresentado anteriormente no capítulo 4.

Tabela 9.2 – Adaptação do critério de Collins (2001) - DPC

Valor	Intervalo	Classificação	Penalidade
$\leq 0,50$	I	Extremamente perigoso	10
]0,50~0,85]	II	Perigoso	5
]0,85~1,15]	III	Segurança apropriada	0
]1,15~2,00]	IV	Conservador	1
$> 2,00$	V	Extremamente conservador	2

A Tabela 9.3 apresenta a classificação do banco de dados segundo o DPC em estudo. Observou-se que a maioria dos resultados se encontra entre os intervalos III (]0,85~1,15]) e IV (]1,15~2,00]), sendo respectivamente de segurança apropriada e conservador, e para os demais

intervalos conforme é mostrado graficamente entre a Figura 9.1 e a Figura 9.4. As normas que apresentaram maiores penalidades foram a norma norte-americana **ACI 318** (2014) e a proposta de **Oliveira** (2003), com 43 e 47 pontos, respectivamente. As fórmulas da norma **ACI 318** não levam em consideração o *size effect*, a taxa de armadura e o índice de retangularidade dos pilares, enquanto que as prescrições do autor citado utilizam o índice de retangularidade, porém não calculam com precisão a contribuição da armadura longitudinal secundária no aumento de rigidez e resistência de lajes unidirecionais.

Ainda na Tabela 9.3, é possível visualizar a análise de segurança, em que se observa que a maior parte de todas as normas apresentou resultados conservadores; o código **EC2** possui 06 seis peças contra a segurança enquanto a **NBR 6118** apresenta 23 (mais de 60%) das peças no Normas intervalo contra a segurança. Com isso ainda apresentam penalidades muito elevadas (acima de 20) segundo o critério de **Collins** (2001). Em relação aos resultados estatísticos, a prescrição que apresentou melhor desempenho, de forma geral, foi a norma **EC2**, com Média = 1,03, desvio padrão DP = 0,17 e coeficiente de variação CV = 17,11%. A norma **MC 2010** foi menos penalizada, apresentando 40 pts.

Tabela 9.3 – Classificação segundo o critério de Collins (2001) – DPC

Estatística	Norma	ACI 318 (2019)	EC 2 (2004)	MC 2010 (2011)	NBR 6118 (2014)				
	Média		1,45	1,20	1,15	0,95			
DP		0,37	0,20	0,44	0,16				
CV (%)		25,62	16,29	38,59	17,29				
R ²		0,69	0,84	0,35	0,79				
MAPE (%)		28,23	17,31	35,43	15,85				
Seguro	$\lambda < 1$	3,00	6,00	13,00	23,00				
	$\lambda \geq 1$	35,00	32,00	25,00	15,00				
	total	38,00	38,00	38,00	38,00				
Crit. Collins (2001)	Intervalo	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.
	$x \leq 0,5$	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	20,00	0,00	0,00
	$0,5 < x \leq 0,85$	1,00	5,00	0,00	0,00	8,00	40,00	11,00	55,00
	$0,85 < x \leq 1,15$	7,00	0,00	16,00	0,00	7,00	0,00	25,00	0,00
	$1,15 < x \leq 2,00$	27,00	27,00	22,00	22,00	20,00	20,00	2,00	2,00
	$x > 2,00$	3,00	6,00	0,00	0,00	1,00	2,00	0,00	0,00
	Total	38,00	38,00	38,00	22,00	38,00	82,00	38,00	57,00

Obs.: Lj. – Laje; Pe. – Penalidades; DP – Desvio Padrão; CV – Coeficiente de variação.

O desempenho das hipóteses é apresentado da Figura 9.1 à Figura 9.4, que mostram as previsões de resistência dos modelos em relação aos resultados experimentais. Destaca-se o melhor desempenho da norma europeia EC2, com fator de correlação $R^2 = 0,87$, e mais próxima da reta ideal 1/1 que seria a carga teórica exatamente igual a carga experimental. A resistência ao puncionamento das lajes lisas sofre influência principalmente da altura útil da laje, perímetro de controle e resistência à compressão do concreto. É limitada a uma tensão máxima de cisalhamento $V_{Rmáx}$ no dimensionamento. Além disso, tem-se as contribuições de taxas de armaduras secundárias e índices de retangularidade dos pilares que ainda não são considerados por nenhuma das prescrições normativas apresentadas e que se refletem diretamente nos gráficos abaixo.

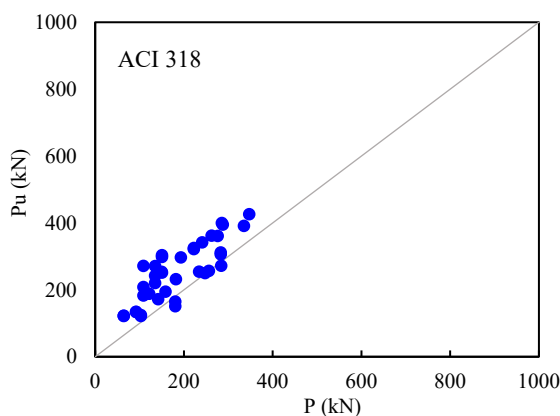


Figura 9.1 – Dispersão dos resultados ACI 318 (2019)

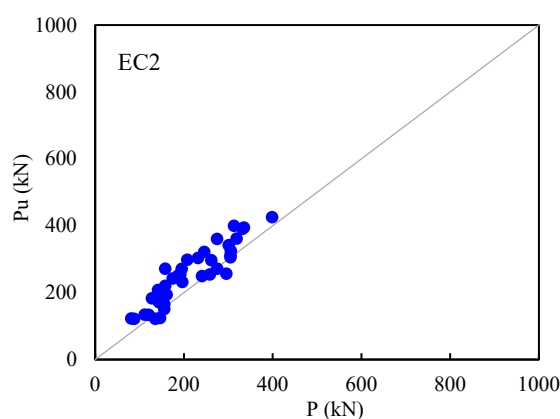


Figura 9.2 – Dispersão dos resultados do EC2 (2004)

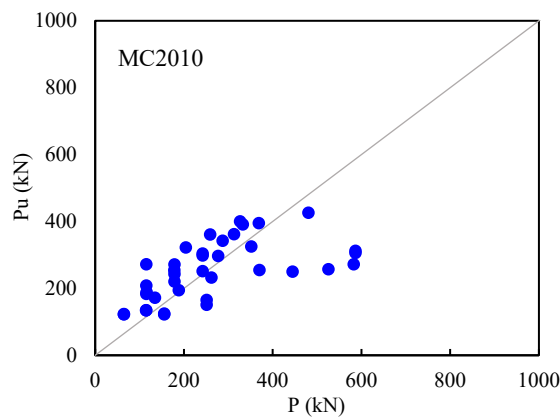


Figura 9.3 – Dispersão dos resultados do MC2010 (2011)

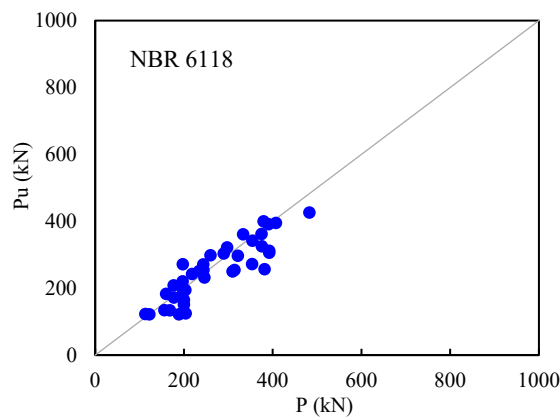


Figura 9.4 – Dispersão dos resultados de NBR 6118 (2014)

A carga de ruptura teórica demonstra-se mais conservadora, sobretudo segundo as normas [ACI-318](#) e [MC 2010](#). A subestimação máxima observada foi de 69% para a primeira e de 75% para a segunda. Este resultado indica que a norma norte-americana carece de parâmetros para a previsão da resistência máxima à punção, por exemplo, taxa de armadura e índice de retangularidade dos pilares e a [MC 2010](#) tende a apresentar resultados mais imprecisos de rotação quando se trata de lajes unidirecionais.

A Figura 9.5 apresenta a variabilidade de resultados por meio do *boxplot*, que exhibe os valores mínimos, máximos, primeiro quartil (Q1) com valores até 25% menores que a média e segundo quartil com valores até 25% maiores que a média da amostragem. Este é um gráfico do tipo exploratório, usado para demonstrar a distribuição de base de dados criado por [John W. Tukey](#). Na mesma figura, destaca-se o comportamento da norma EC2 com melhor distribuição, em que a mediana ficou mais próxima de 1,0 e os valores máximos não ultrapassaram 1,4 e 0,6 (sem discrepâncias ou *outliers*) e ainda com maior parte com resultados acima de 1,0, o que torna as

normas adequadamente seguras do ponto de vista estrutural para lajes lisas unidirecionais de concreto armado sem armadura de cisalhamento. Atenção especial precisa ser dada à norma **MC 2010**, que apresenta determinados dados máximos acima de 1,7 da relação experimental-teórico, e a dispersão de pior qualidade, o que foi observado anteriormente na análise estatística e análise de segurança.

A Figura 9.5 mostra graficamente o desempenho das normas, em que se coloca em posição de destaque a norma **NBR 6118** que, apesar de ter média muito próxima de 1,0, apresentou valores extremos entre 0,61 e 1,38 e quartis simetricamente distribuídos em valores distantes 13% da média.

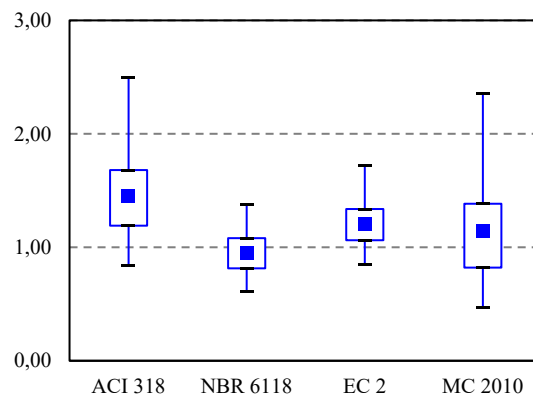


Figura 9.5 – Boxplot de todas as prescrições estudadas

10. HIPÓTESE E TEORIA PROPOSTA

10.1. Regressão não linear

Segundo [Lessman \(2015\)](#), modelos de regressão são usados para descrever o comportamento de uma variável aleatória y como uma função de condicionantes x chamadas de variáveis explicativas, covariáveis ou estímulos. Com tais modelos, busca-se encontrar e descrever padrões de homogeneidade dentre a heterogeneidade encontrada em um conjunto de observações de y . Tal procedimento permite: explicar, ao menos parcialmente, o comportamento de y ; quantificar a influência das condicionantes em y ; selecionar, mediante algum critério, as condicionantes relevantes; prever o comportamento de y para estados observados e também não observados das condicionantes x ; e, por fim, avaliar a incerteza associada a esse processo.

Para [Hosmer e Lemeshow \(2000\)](#), como alternativa, é possível assumir: uma regressão polinomial, por exemplo, uma forma linear ou quadrática; uma ligação não identidade, por exemplo, exponencial; ou algum modelo intrinsecamente não linear, por exemplo, dado por algum sistema de equações diferenciais. Essa discussão sugere que modelos lineares estendidos devem considerar relações não lineares entre y e x , heterogeneidade de variâncias e não normalidade, possivelmente nessa ordem de relevância. Como mostrado na Figura 10.1 para o seguinte modelo não linear da Equação 10.1.

$$y_i/x_i \sim N[\mu_i, \sigma^2]$$
$$\mu_i = g(\beta_0, \beta_1, x_i) = \frac{\theta_a x}{\theta_v + x}$$

Equação 10.1

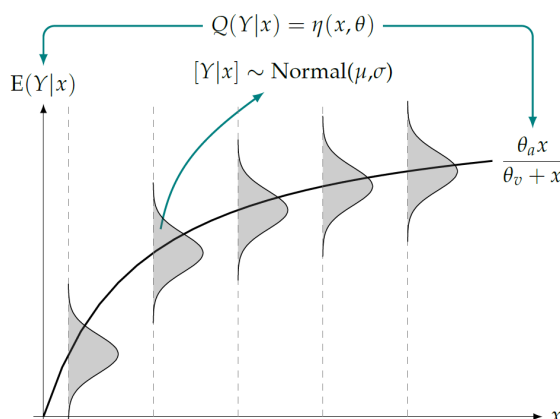


Figura 10.1 – Modelo de regressão não linear ([Zeviani et al. ,2013](#))

Em que esta é uma função não linear do vetor de parâmetros $\theta = (\theta_a, \theta_v)$. A distribuição de y é suposta gaussiana o que implica em erros aditivos à função média sendo ainda possível escrever o modelo na forma alternativa:

$$y_i/x_i = \frac{\theta_a x}{\theta_v + x_i} + e_i \quad \text{Equação 10.2}$$

$$e_i \sim N(0, \sigma^2)$$

O modelo apresentado, portanto, pode ser dito um modelo não linear de y como função de x , ou equivalente, um modelo linear generalizado com distribuição gaussiana, função de ligação inversa e covariável $1/x$.

Os modelos de regressão são amplamente aplicados em diversas áreas de conhecimento para descrever uma variável resposta y em função de uma variável explicativa x . O modelo estatístico é linear se a quantidade de interesse é função linear dos parâmetros, em contrário, é não linear. Por exemplo, em estudos de flexão simples, o momento fletor resistente de uma armadura em uma seção retangular de concreto armado como função da linha neutra (x) pode ser obtida com o uso Equação 10.3, linear.

$$M_s = A_s \cdot f_{ys} \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad \text{Equação 10.3}$$

O modelo acima é linear nos parâmetros da equação ($ax+b$). No entanto, a distribuição da tensão no concreto (Equação 10.4) tem parâmetros não lineares como a deformação do concreto. Uma vez que pelo menos um dos parâmetros aparece de forma não linear, o modelo é não linear. Tendo como principais vantagens, em relação ao modelo linear, que sua escolha está associada à conhecimento prévio sobre a relação a ser modelada e geralmente apresenta interpretação prática para os parâmetros utilizados.

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \quad \text{Equação 10.4}$$

Os modelos apresentados a seguir, extraídos de [Zeviani et al. \(2013\)](#), seguem o mesmo comportamento visto anteriormente na Figura 8.77, ou seja, logarítmico, exponencial e logístico. Os autores consideram estas generalizações supracitadas; assim, esses modelos

podem ser usados para criação de um modelo de previsão doravante chamado de “v” do comportamento de carga última (P) e tensão (V) segundo a variação da taxa de armadura secundária (ρ_y).

$$v = (a + b \cdot \log \rho_y) \quad \text{Equação 10.5}$$

$$v = |(a - b \cdot c^{\rho_y})| \quad \text{Equação 10.6}$$

$$v = \left(\frac{|a - b|}{1 + (\rho_y/X_0)^c} + b \right) \quad \text{Equação 10.7}$$

Dessa forma, algoritmos de uma ou outra metodologia podem ser usados para ajustar o modelo para um determinado conjunto de dados e devem fornecer resultados equivalentes, retornando as mesmas estimativas (após reparametrizações) e valores preditos. Na linguagem R, pode-se fazer o ajuste com funções como *NLS* (Nonlinear Least Squares) ou *GLM* (Generalized Linear Models).

Aqui, foi usada a simulação computacional *Generalized Reduced Gradient (GRG)*, arbitrando-se os valores iniciais dos parâmetros de cada modelo como iguais a 1,0. Os parâmetros do modelo foram ajustados até que a concordância entre os dados estimados-observados fosse razoavelmente boa, ou seja: $R^2 \approx 1,0$; $CV < 10\%$; $MAPE < 10\%$ e $SQE = \text{mínimo}$. Esses parâmetros são suficientes para encontrar um bom ponto de convergência para o refinamento não linear.

Assim, as estimativas de parâmetros iniciais foram criadas com algoritmos híbridos que usam randomização e elitismo, através das funções *macro* e *solver GRG* do *Microsoft Excel*. Por sua vez, tem-se os parâmetros para cada modelo de regressão analisado, conforme apresentado nas equações a seguir, com destaque para o modelo logístico que se adapta perfeitamente à taxa de armadura secundária nula, resultando em um índice 1,0, ao contrário dos modelos exponencial e logarítmico. Os resultados estatísticos da relação carga última computacional por carga última estimada são apresentados na Tabela 10.1 e da Figura 10.2 à Figura 10.4.

$$M_I = \frac{\nu \cdot 0,18}{\lambda} \cdot u \cdot d \cdot \sqrt[3]{\rho \cdot f_c} \cdot k \quad \text{Equação 10.8}$$

Sendo: $\nu = 1,5 + 0,41 \cdot \log \rho_y$ Equação 10.9

$$M_{II} = \frac{\nu \cdot 0,18}{\lambda} \cdot u \cdot d \cdot \sqrt[3]{\rho \cdot f_c} \cdot k \quad \text{Equação 10.10}$$

Sendo: $\nu = 1,71 - 0,61 \cdot 0,34^{\rho_y}$ Equação 10.11

$$M_{III} = \frac{0,18}{\lambda \cdot \nu^{1,42}} \cdot u \cdot d \cdot \sqrt[3]{\rho \cdot f_c} \cdot k \quad \text{Equação 10.12}$$

Sendo: $\nu = \frac{|0,41 - 0,67|}{1 + (\rho_y/0,54)^{1,44}} + 0,67$ Equação 10.13

Tabela 10.1 – Desempenho estatístico de $P_{\text{computacional}} / P_{\text{teorico}}$ dos modelos de regressão

	M_I	M_{II}	M_{III}
MÉDIA	1,01	1,01	1,00
DP	0,09	0,07	0,07
$\lambda < 1$	20,00	20,00	21,00
$\lambda \geq 1$	20,00	20,00	19,00
CV	8,56	7,50	7,51
R^2	0,91	0,93	0,93
MAPE	6,24	6,15	6,11

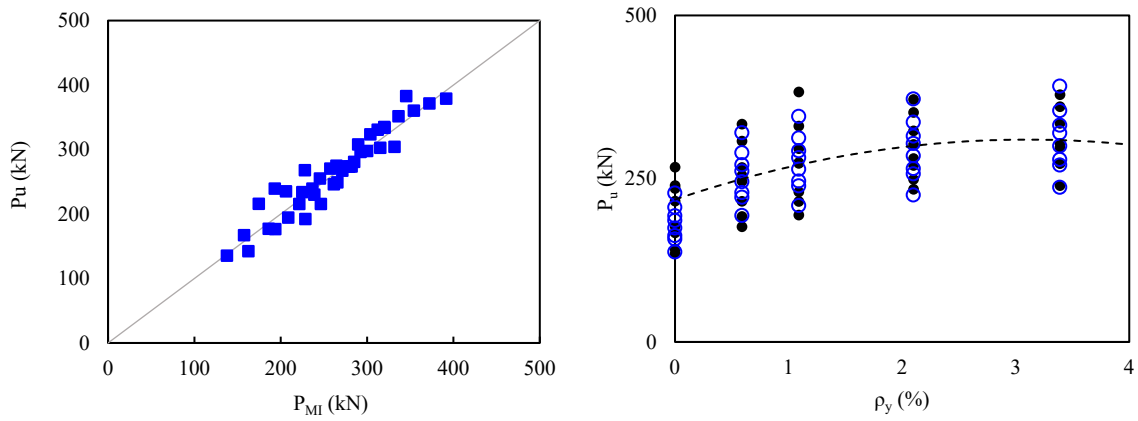


Figura 10.2 – Comportamento gráfico do modelo I

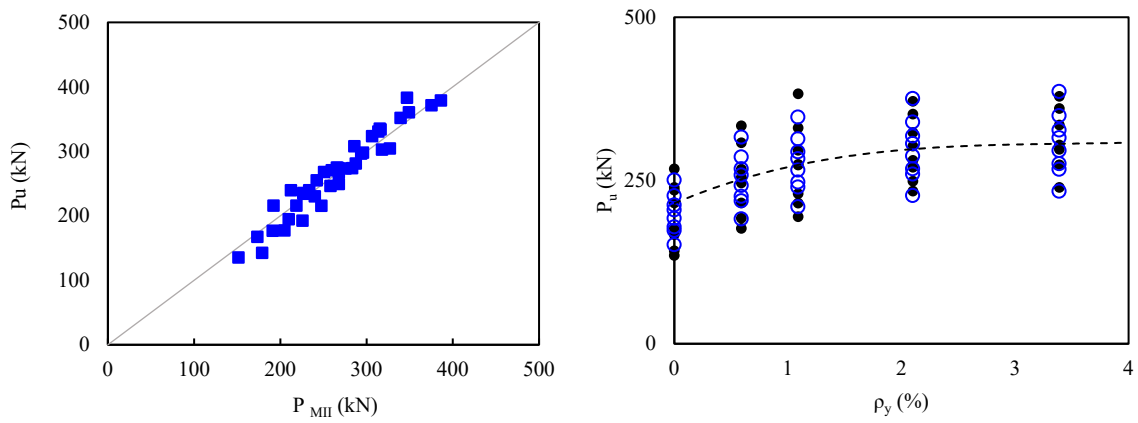


Figura 10.3 – Comportamento gráfico do modelo II

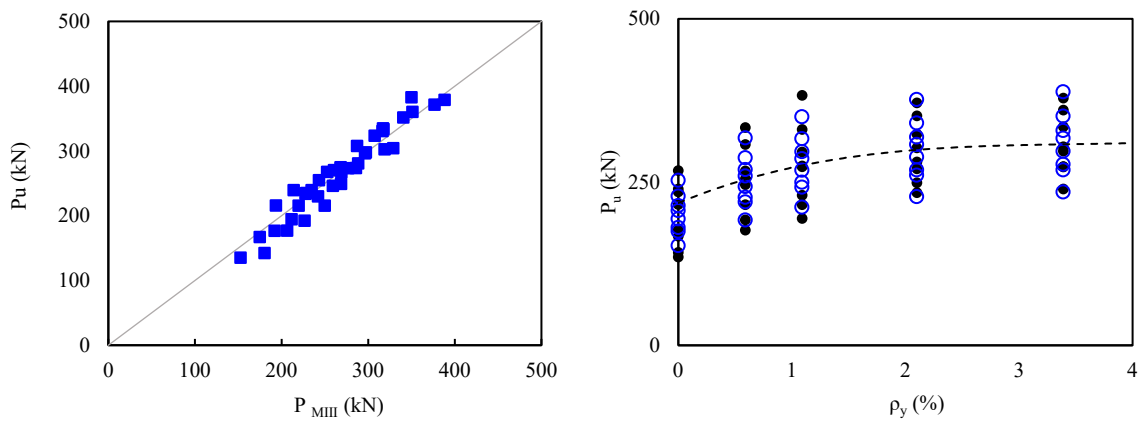


Figura 10.4 – Comportamento gráfico do modelo III

10.2. Equação proposta

Considerando os resultados apresentados pelos modelos de regressão não linear até aqui estudados, foi selecionada a opção modelo III (Equação 10.12 e Equação 10.13), pelo melhor desempenho estatístico aplicado ao *BD* computacional, em lajes lisas unidirecionais de concreto armado apoiadas sobre pilares retangulares centrais gerando ganhos de tensão resistente da ordem de 0,15 MPa, conforme apresentado pela Figura 10.5

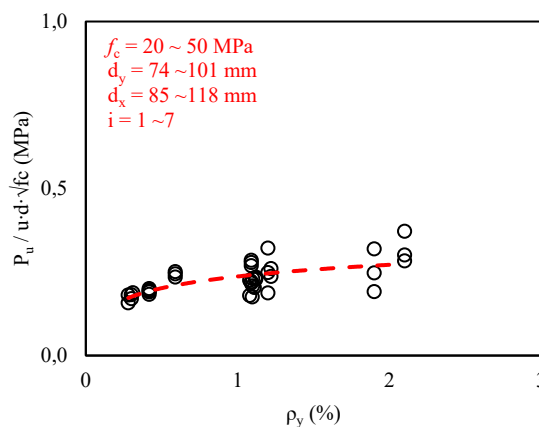


Figura 10.5 – Evolução da tensão com a taxa de armadura secundária

Nesse sentido, a colaboração da taxa de armadura secundária se estabelece em $y = 1$ para taxa nula, e $y = 1,58$ para taxa de 2 %. Em casos de ausência de armadura secundária, a equação se reduz ao índice 1, não interferindo na resistência final da estrutura. E desta forma, a proposta implementa a contribuição da armadura em ganho de até 58,0 %, o que concorda aproximadamente com a contribuição observada nas simulações computacionais e experimentais desta pesquisa, de acordo com as equações simplificadas mostradas na Figura 10.6.

Quando testada e validada no *BD* experimental (considerando somente as lajes que rompem por punção), a proposta desta tese supera estatisticamente todas as normas estudadas, inclusive com boa acurácia (MAPE = 8,8 %) e melhor coeficiente de variação (CV = 11,8 %). Em relação à segurança, apresenta mais de 70,0 % de respostas seguras ($\lambda > 1,0$), frente à norma [NBR 6118](#), que apresenta a maior parte dos resultados como inseguros ($\lambda < 1,0$). E, segundo o critério de [Collins \(2001\)](#), a proposta apresentou 79,0 % das respostas dentro do intervalo de segurança (Penalidade 0,00) e a menor penalidade total: apenas 12 pontos, conforme ilustrado na Tabela 10.2.

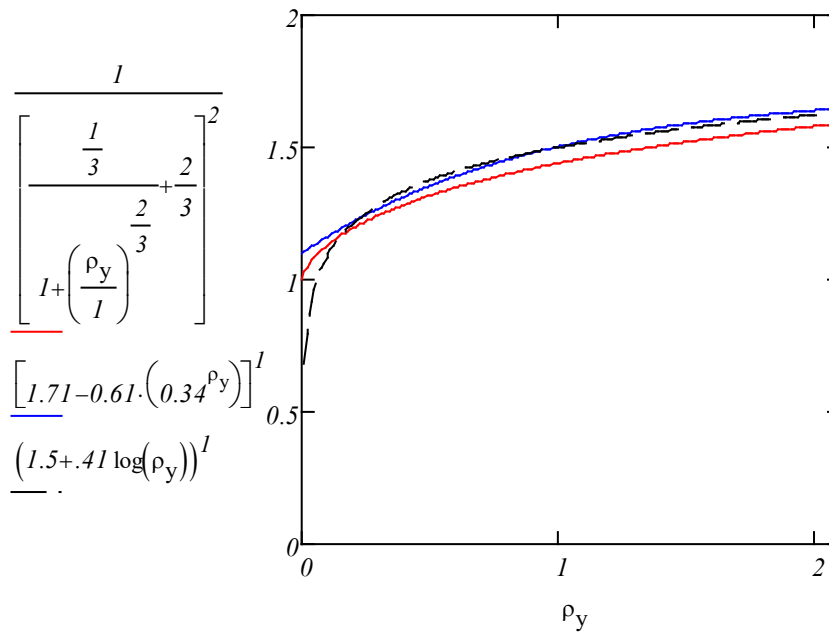


Figura 10.6 – Comportamento dos modelos de regressão não linear

Tabela 10.2 – Resumo dos resultados do *BD* experimental

	Norma	ACI 318 (2019)	EC 2 (2004)	MC 2010 (2011)	NBR 6118 (2014)	PROPOSTA (2022)					
Estatísticos	Média	1,45	1,20	1,15	0,95	0,95					
	DP	0,37	0,20	0,44	0,16	0,11					
	CV (%)	25,62	16,29	38,59	17,29	11,30					
	R ²	0,69	0,84	0,35	0,79	0,91					
	MAPE (%)	28,23	17,31	35,43	15,85	10,58					
Seg.	λ < 1	3,00	6,00	13,00	23,00	25,00					
	λ ≥ 1	35,00	32,00	25,00	15,00	13,00					
	total	38,00	38,00	38,00	38,00	38,00					
Collins (2001)		Lj.	Pe.	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.	Lj.	Pe.
	x ≤ 0,5	0	0	0	0	2	20	0	0	0	0
	0,5 < x ≤ 0,85	1	5	0	0	8	40	11	55	4	20
	0,85 < x ≤ 1,15	7	0	16	0	7	0	25	0	33	0
	1,15 < x ≤ 2,00	27	27	22	22	20	20	2	2	1	1
	x > 2,00	3	6	0	0	1	2	0	0	0	0
Total	38	38	38	22	38	82	38	57	38	21	

Obs.: Lj. – lajes; Pe. – Penalidades; DP – Desvio Padrão; CV – Coeficiente de variação.

Graficamente, é possível visualizar a melhor precisão e acurácia do modelo proposto, representado por média segura (Figura 10.7), valores extremos mais próximos da média, entre 0,83 e 1,35 e finalizando com quartis 0,99 e 1,11 (Figura 10.8), tendo então o melhor desempenho dentre as demais equações.

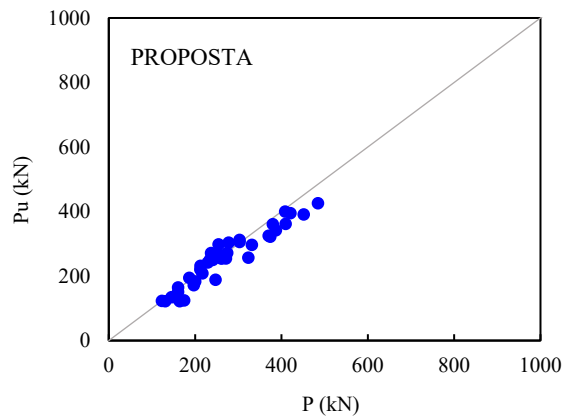


Figura 10.7 – Dispersão de resistência experimental \times resistência teórica

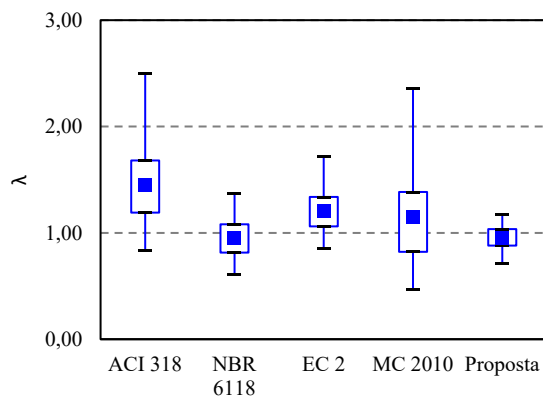


Figura 10.8 – Comparação boxplot da proposta final

Paralelamente aplica-se a proposta de equação às nove lajes ensaiadas e compara-se às normas técnicas para verificação de quais os melhores resultados. Observa-se, então, que a maioria das normas continua sendo muito conservadora, enquanto a proposta desta pesquisa mostra média apenas 6,0 % acima do valor de referência, com menor coeficiente de variação (7,7 %), maior coeficiente de determinação (0,91) e menor erro médio absoluto percentual (8,1 %), conforme apresentado na Tabela 10.3.

Tabela 10.3 – Resumo dos resultados das nove lajes

		ACI 318	NBR 6118	EC 2	MC 2010	PROPOSTA
Estatísticos	MÉDIA	1,91	1,15	1,43	1,49	1,06
	DP	0,27	0,09	0,12	0,40	0,08
	CV (%)	13,96	8,27	8,27	26,77	7,73
	R ²	0,43	0,82	0,82	0,45	0,91
	MAPE (%)	46,9	12,3	29,9	29,1	8,10
Seg.	$\lambda < 1$	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00
	$\lambda \geq 1$	9,00	9,00	9,00	9,00	7,00
	TOTAL	9,00	9,00	9,00	9,00	9,00
Collins (2001)		Lj. Pe.	Lj. Pe.	Lj. Pe.	Lj. Pe.	Lj. Pe.
	$x \leq 0,5$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	$0,5 < x \leq 0,85$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	$0,85 < x \leq 1,15$	0 0	7 0	0 0	1 0	8 0
	$1,15 < x \leq 2,00$	6 6	2 2	9 9	7 7	1 1
	$x > 2,00$	3 6	0 0	0 0	1 2	0 0
	TOTAL	9 12	9 2	9 9	9 9	9 1

Obs.: Lj. – lajes; Pe. – Penalidades; DP – Desvio Padrão; CV – Coeficiente de variação.

Por fim, tem-se a seguinte hipótese/tese validadas:

- “o ganho de resistência proporcionado pela armadura secundária (ρ_y) com taxa de $0 \leq \rho_y \leq 2,0$ %, válido para concretos de resistência convencional de $20 \leq f_c \leq 50$ MPa e pilares de índice de retangularidade de $1,0 \leq i \leq 7,0$, varia de 0 à 58,0 %. E se apresenta matematicamente de forma simplificada conforme a Equação 10.14 aplicada na Equação 10.15 para casos de cálculo e dimensionamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares simétricos e diferentes taxas de armadura secundária.”

$$v = \left[\frac{1/3}{1 + (\rho_y)^3} + \frac{2}{3} \right] \quad \text{Equação 10.14}$$

$$P_{prop} = \frac{0,18}{\lambda \cdot v^2} \cdot u \cdot d \cdot \sqrt[3]{\rho \cdot f_c} \cdot k \quad \text{Equação 10.15}$$

Em que:

d – altura útil, que pode ser calculada como $\frac{d_x+d_y}{2}$ (mm);

$\lambda = 0,93 \cdot \left(\frac{c_{max}}{d}\right)^{0,14}$ para pilares retangulares com c_{max} perpendicular à vão principal (x) (mm);

u – perímetro de controle medido a $2d$ da face do pilar (mm);

ρ_y – taxa de armadura longitudinal secundária, máximo 2,0 %;

ρ – taxa de armadura longitudinal, podendo ser calculada como $\sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$, máximo 2,0 %;

f_c – resistência à compressão do concreto, válida para $20 \leq f_c \leq 50$ (MPa);

$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$ com d (mm), máximo 2,0 ;

v – fator de contribuição da armadura longitudinal secundária válido para $0 \leq \rho_y \leq 2,0$ %.

11. CONCLUSÕES

11.1. Programa experimental

Conclui-se que o programa desenvolvido em laboratório atendeu adequadamente à necessidade da pesquisa e representou o fenômeno do puncionamento associado à flexão simples de lajes lisas unidirecionais de concreto armado, assim como proporcionalmente em situações reais de obras da construção civil.

As dimensões ($1800 \times 1800 \times 120$) mm, taxa de armadura principal ($\cong 1,0 \%$) e taxas de armadura secundária ($\cong 0,5 \%$; $1,0 \%$ e $2,0 \%$) e pilares de índices de retangularidade 1, 3 e 5 (85×85 mm; 85×255 mm e 85×425 mm) tiveram desempenho adequado, pois foram capazes de mostrar os diferentes tipos de comportamentos de punção, flexo-punção e flexão das lajes, sem perda de nenhum dos nove espécimes ensaiados em laboratório.

Os modelos de *strain gauge*, *LVDT*, célula de carga, cilindro hidráulico e sistema de aquisição de dados utilizados foram adequadamente funcionais, permitindo o registro de históricos de deformações, deslocamentos e cargas durante todos os ensaios. Através desses modelos, foi possível analisar a ductilidade e rigidez das peças, de modo a destacar as mínimas diferenças possíveis entre os resultados.

O sistema de ensaio com tirantes e vigas metálicas furadas de reação foi suficiente para representar as condições de contorno das lajes em situação de apoio unidirecional. Foram apresentados deslocamentos máximos (em torno de 30 mm) no meio do vão e médios (em torno de 15 mm) nas bordas livres das lajes. Foi observada fissuração bastante evidente e típica dos modos de ruptura com formação do tronco de cone de punção e, como nos casos das lajes *L3B* e *L3C*, inclusive com a formação das duas fissuras paralelas ao pilar, comuns ao modo de ruptura por flexão unidirecional. Esse resultado mostra que o sistema é indicado para o estudo de lajes lisas unidirecionais em pesquisas futuras.

As deformações na superfície de concreto são muito baixas e não alcançam as deformações de esmagamento ($3,5 \%$). Isto ocorre devido à resposta suficiente da resultante de compressão do concreto para a faixa de laje solicitada sobre o pilar simétrico, o que proporciona o equilíbrio

necessário para seções normalmente armadas ou subarmadas de taxas de armadura de até 2%, aproximadamente.

Foram monitoradas 3 camadas de barras de armaduras de cada direção; este monitoramento se mostrou satisfatório para a verificação da distribuição das deformações ao longo das placas. Foi possível perceber que a formação do tronco de cone aumenta a deformação na armadura central porque a projeta para fora do maciço da laje. Além disso, observou-se que uma laje unidirecional sujeita a punção só assume um comportamento mais dúctil quando no mínimo 2/3 das armaduras principais alcançam 100% da deformação de escoamento.

O corte das lajes revelou uma formação bem característica do tronco de cone em todas elas e variação do ângulo de inclinação da fissura crítica até que esta toque a camada de armadura principal. Em geral, constatou-se que menores taxas de armadura secundária levaram a menores inclinações da fissura crítica, o que pode sugerir, para trabalhos futuros, que novos modelos teóricos podem ser adaptados com o uso de modelos de perímetro crítico.

Os resultados experimentais indicaram que, em lajes lisas unidirecionais com armadura secundária elevada (taxa de 2%), pilares retangulares e com carregamento simétrico, há o aumento de rigidez e capacidade de carga última, e mudança no modo ruptura, que passa de punção para a flexão. Como pôde ser visualizado nos grupos de lajes tipo *A* e *B*, para taxas de armadura secundária de 0,5% não houve escoamento ($\epsilon_{ys} = 2,35\%$) de armaduras principais. Já nas mesmas lajes, porém quando tinham taxa de armadura secundária de 2%, houve o escoamento das armaduras principais.

11.2. Programa computacional

O *Finite Element Method (FEM)* e o *Concrete Damage Plasticity (CDP)* são satisfatoriamente adequados para a análise de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com carregamento simétrico, com elementos *T3D2* para modelagem das barras e *C3D4* para modelagem dos sólidos em discretização de malha de 40 mm, desde que devidamente alimentados com dados dos materiais e calibrados para as condições de contorno do sistema estrutural analisado.

É possível realizar modelos computacionais inteiros de lajes lisas unidirecionais de concreto armado e obter resultados satisfatórios quando comparados às respostas das nove lajes experimentais, com coeficiente de determinação (R^2) 0,90 e média do erro absoluto percentual (MAPE) de 5,4 %. Os modelos computacionais tendem a ser mais rígidos, porém apresentam cargas finais muito próximas das experimentais (com $P_u/P_{fem-cdp}$ próximo de 1). Isto se deve ao fato de esses modelos computacionais representarem a perda de rigidez provocada pela fissuração do concreto de maneira aproximada pelo dano. O padrão de fissuração superficial e transversal se mostrou semelhante ao observado no laboratório, inclusive concordando com modos de ruptura de punção.

O modelo de $\frac{1}{4}$ é perfeitamente adequado e eficiente; reduz os custos computacionais e apresenta resultados idênticos aos experimentais. Desta forma, oferece uma forma inédita de modelagem de lajes lisas unidirecionais que pode ser utilizada por estudantes e engenheiros da área de análise e dimensionamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares simétricos.

11.3. Normas técnicas

Quando comparados ao *BD* experimental (Capítulo 9), os resultados das normas se apresentam, de forma geral, muito dispersos. A maior parte das normas, com exceção da [NBR 6118](#), tende a subestimar a resistência à punção de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com diferentes taxas de armadura secundária e pilares retangulares, ao passo que despreza a contribuição da armadura secundária presente na laje.

A norma brasileira [NBR 6118](#) apresenta precisão média ($R^2 = 0,79$ e $MAPE = 15,9 \%$) e baixa acurácia; com destaque, apresenta 60,0 % das previsões inseguras ($P_u/P_{norma} \lambda < 1$), o que é um dado preocupante e que precisa ser revisto e atualizado tão logo possível.

O modelo de cálculo do [MC 2010](#) é inteiramente baseado na rotação da laje; mostra-se bastante eficaz para a previsão de resistência de lajes bidirecionais em que as rotações são proporcionalmente menores devido à maior rigidez dos apoios - diferentemente dos casos de lajes unidirecionais em que as previsões ficam muito distantes das cargas experimentais. E desta forma, apresenta, em relação à P_u/P_{norma} , os valores de $R^2 = 0,35$ e $MAPE = 35,4 \%$.

A norma [ACI 318](#) tende a subestimar e manter uma reserva de resistência muito elevada com $\lambda > 1,45$. Apresentou, também, valores muito baixos de precisão e acurácia, com $R^2 = 0,69$ e $MAPE = 28,2 \%$.

A norma [EC 2](#) apresenta o melhor desempenho dentre as normas analisadas, pois é razoavelmente segura (média de $\lambda = 1,20$); no entanto, ainda apresenta baixos valores de precisão ($R^2 = 0,84$) e acurácia ($MAPE = 17,3 \%$).

11.4. Contribuições para a estimativa de resistência

O modelo de equação logístico proposto é adequado, pois assim como observado no capítulo 8, a taxa de crescimento é perceptível até um limite de $\rho_y \cong 2,0 \%$; após esse limite, a contribuição da taxa de armadura secundária passa a ser desprezível. Uma equação de crescimento populacional se eleva até um tamanho específico da população; após esse limite, ela se estabiliza. O mesmo acontece com a armadura secundária, que contribui para que a resistência à punção da laje aumente até um limite de 2,0 % de armadura, além do qual não há mais ganho significativo de desempenho da peça.

Conforme demonstrado no Capítulo 10, o modelo é estatisticamente adequado, seguro e pouco penalizado pelo critério de [Collins \(2001\)](#), pois acrescenta a contribuição da taxa armadura secundária entre 0 e 2,0 % de forma não linear, aumentando a capacidade resistente da laje em até 50,0 % aproximadamente. É válido para concretos entre 20 e 50 MPa, taxas armadura principal e secundária entre 0 e 2,0 %, pilares quadrados e retangulares de índice (c_{max}/c_{min}) até 7.

11.5. Recomendações para trabalhos futuros

Dentro do escopo do tema de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares centrais e armadura secundária variável, esta pesquisa contribuiu para identificação de aspectos relevantes e decisivos para a verificação e projeto. Porém, certas variáveis ainda precisam ser estudadas e desta forma sugere-se:

- Realizar análises experimentais para verificar a influência de cargas próximas ao apoio ($a/d < 2,5$) nas lajes lisas unidirecionais de concreto armado com armadura secundária variável;
- Realizar ensaios para estudar a contribuição de estribos e/ou *studs* (armadura transversal), buscando uma taxa de armadura de punção otimizada;
- Verificar experimentalmente a influência da direção do pilar, fazendo c_{max} paralelo ao vão principal (x) em lajes unidirecionais com armadura secundária variável;
- Analisar através de modelagem computacional não linear os efeitos da contribuição armadura secundária nas mesmas lajes desta pesquisa quando usados pilares de seção transversal circular;
- Analisar através de modelagem computacional não linear os efeitos da contribuição armadura secundária nas mesmas lajes desta pesquisa quando usados pilares de seção transversal em “L”;
- Verificar o desempenho de outras normas técnicas como DIN 1045, BS 8110, CSA A23, EHE 08 e JSCE 15 comparadas a modelos experimentais e computacionais.

12. REFERÊNCIAS

- 1 ACI 318, American Building Code Requirements For Reinforced Concrete. American Concrete Institute, 2014.
- 2 ACI-ASCE COMMITTEE 426 (1973). The Shear Strength Of Reinforced Concrete Members. In: Journal Of The Structural Division, Vol. 99, N° St6, June, 1973, Pp. 1091-1187.
- 3 ALBUQUERQUE, E. J. P. Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento e Pilar de Canto Reentrante [Distrito Federal] 2015. xxxviii, 379 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutora em Estruturas e Construção Civil, 2015). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.
- 4 ALBUQUERQUE, N. G. B. Comportamento das ligações de lajes lisas de concreto armado com pilares de borda sujeitas a excentricidades interna e externas. Tese de doutorado em estruturas e construção civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Faculdade de Tecnologia. Universidade de Brasília. 2014.
- 5 ALEXANDER, S. D. B., SIMMONDS, S. H. Bond Model For Concentric Punching Shear. ACI Structural Journal, Vol. 89, No. 3, 1992. Pp. 325-334.
- 6 ALEXANDER, S. D. B., SIMMONDS, S. H. Ultimate Strength Of Slab-Column Connections." ACI Structural Journal, Vol. 84, No. 3, 1987. Pp. 255-261.
- 7 ALFARAH, B., LOPEZ-ALMANSA, F., OLLER, S. New Methodology For Calculating Damage Variables Evolution In Plastic Damage Model For RC Structures. Engineering Structures 132. 2017. Pp. 17.
- 8 AL-YOUSIF, A. T., REGAN, P. E., Punching Resistances Of RC Slabs Supported By Large And/or Elongated Columns. The Structural Engineer, London, 2003. Pp. 30-34.
- 9 AMADOR, P. A., LOPES, S. J., PEREIRA, J. E., SOUZA, A. M., TOEBE, M. Análise de Pressuposições dos resíduos em modelo de Regressão Linear para Valores Individuais, Ponderados e Não Ponderados, Utilizando Procedimentos do SAS. Ciência e Natura. UFSM, 33 (2), 2011. Pp. 7 – 22.
- 10 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 8522: Concreto. Determinação Do Módulo De Deformação Estática E Diagrama Tensão-Deformação. Métodos De Ensaio. Rio De Janeiro, 1984.
- 11 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 8522: Concreto. Determinação Do Módulo De Deformação Estática E Diagrama Tensão-Deformação. Métodos De Ensaio. Rio De Janeiro, 2017.
- 12 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5739: Concreto – Ensaio De Compressão De Corpos-De-Prova Cilíndricos – Método De Ensaio. Rio De Janeiro, 1994.
- 13 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5739: Concreto – Ensaio De Compressão De Corpos-De-Prova Cilíndricos – Método De Ensaio. Rio De Janeiro, 2018.
- 14 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto De Estruturas De Concreto. Rio De Janeiro, 2014.

- 15 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6152: Materiais Metálicos. Determinação Das Propriedades Mecânicas À Tração. Métodos De Ensaio. 1992.
- 16 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7222. Determinação Da Resistência À Tração Por Compressão Diametral De Corpos-De-Prova Cilíndricos. Rio De Janeiro, 1994.
- 17 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7222. Determinação Da Resistência À Tração Por Compressão Diametral De Corpos-De-Prova Cilíndricos. Rio De Janeiro, 2011.
- 18 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7480. Barras E Fios De Aço Destinados A Armaduras Para Concreto Armado – Especificação. Rio De Janeiro, 1996.
- 19 ATHANASIOU, A., EBRAHIMKHANLOU, A., ZABORAC, J., HRYNYK, T., & SALAMONE, S. (2019). A machine learning approach based on multifractal features for crack assessment of reinforced concrete shells. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. doi:10.1111/mice.12509
- 20 BEHZAD TALAEITABA, S., SAFAIE, M., & ZAMANI, R. (2021). Development and application of a new base isolation system in low-rise buildings. *Structures*, 34, 1684–1709.
- 21 BISSCHOP, J.; WITTEL, F. Contraction gradient induced microcracking in hardened cement paste. *Cem. Concr. Compos.* 2011, 33, 466–473.
- 22 BJORNSTROM, J. Spruckna Betongdammar – Oversikt Och Berakningsmetoder (In Swedish). Report 06:29, Elforsk, 2006.
- 23 BOUAZIZ, R. TRUFFAULT, L. BORISOV, R. OVALLE, C. LAIARINANDRASANA, L. MIQUELARD-GARNIER, G. FAYOLLE, B. Elastic Properties of Polychloroprene Rubbers in Tension and Compression during Ageing. *Polymers* 2020, 12, 2354; doi:10.3390/polym12102354.
- 24 BRANCO, V. H. L. Resistência Ao Cisalhamento De Vigas “T” De Concreto Armado: Verificação Das Longarinas Da Ponte Sobre O Rio Sororó. Dissertação De Mestrado. ITEC, UFPA, 2011.
- 25 BRASTUP, M. W. NIELSEN, M. P. JENSEN, B. B. BACH, F. Axisymmetric Punching Of Plain And Reinforced Concrete. Structural Research Laboratory, Technical University Of Denmark, 1976.
- 26 BROMS, J. Concrete flat Slabs And Footings Design Method For Punching And Detailing For Ductility. Doctoral Thesis. Division Of Structural Design And Bridges, Royal Institute Of Technology, Se-100 44, Stockholm, Sweden, 2005.
- 27 BU WS, POLAK MA. Seismic retrofit of reinforced concrete slab-column connections using shear bolts. *ACI Struct J* 2009;106(4):514–22.
- 28 CAETANO, M. J. L. Coeficiente de Poisson, 2010. Disponível em: <https://www.ctborracha.com/borracha-sintese-historica/propriedades-das-borrachas-vulcanizadas/propriedades-fisicas/propriedades-mecanicas/coeficiente-de-poisson/>. Acessado em: 20 de julho de 2021.

- 29 CARVALHO, A. S. Análise Experimental De Lajes Lisas De Concreto Armado De Alta Resistência Com Metacaulim Apoiadas Em Pilares Retangulares E Armadas À Punção. Dissertação De Mestrado. Programa De Pós-Graduação Em Engenharia Civil. Universidade Federal Do Pará. 2006.
- 30 CEB-FIP. Model Code 1990: Final Draft. Bulletin D'information, CEB, Lausanne, July 1991.
- 31 CEB-FIP. Model Code 2010: Final Draft. Model Code Prepared By Special Activity Group 5. Lausanne, 2011.
- 32 CHEN, W. Plasticity In Reinforced Concrete. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1982.
- 33 CHIHIRO HIRAMA, TAKASHIGE ISHIKAWA, AKIE HISAGI, NGUYEN, MINH HAI. A comprehensive review of the literature on shear strength of push-out tests of headed studs: Comprehensive and holistic analysis focusing on the type of slab, failure mode, and stud diameter. Journal of Structural and Construction Engineering, AIJ, Vol. 82 No. 735, 745-751, May, 2017.
- 34 CHO, Y. S., SEO, C. J. Punching Shear Resistance Of Flat Plate Connection Under Monotonic Load. Magazine Of Concrete Research. 62, No. 7, 2010. Pp 453-463.
- 35 CHOI, W. C. YUN, H. D. KIM, S. W. Flexural Performance Of Reinforced Recycled Aggregate Concrete Beams. Magazine Of Concrete Research. 64 (9), 2012. Pp. 837-848.
- 36 COIN, A. THONIER, H. Experiments On Shear In Reinforced Concrete Slabs. Annales Du Batiment et Des Travaux Publics, 2007. Pp. 7-16.
- 37 COLLINS, M.P. Evaluation Of Shear Design Procedures For Concrete Structures. A Report Prepared For The CSA Technical Committee On Reinforced Concrete Design, 2001.
- 38 CORNELISSEN, H. A. W., REINHARDT, H. W. Uniaxial tensile fatigue failure of concrete under constant-amplitude and programme loading. Magazine of Concrete Research, 36(129), 1984. pp. 216-226.
- 39 CULLINGTON, D. W., DALY, A. F., HILL, M. Assessment Of Reinforced Concrete Bridges: Collapse Tests On Thurloxton Underpass. Bridge Management, Vol. 3, 1996. Pp. 667- 674.
- 40 DAMASCENO, L. S. R. Análise Experimental De Lajes Lisas Unidirecionais De Concreto Armado Com Pilares Retangulares Ao Puncionamento. Dissertação De Mestrado, Programa De Pós-Graduação Em Engenharia Civil, Universidade Federal Do Pará, 2007.
- 41 DAVIS, A. G., RENS, K. L., WIPF, T. J., & KLAIBER, F. W. (2002). Review of nondestructive evaluation techniques of civil infrastructure. Journal of Performance of Constructed Facilities, 13(1), 47-48. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0887-3828\(1999\)13:1\(47\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0887-3828(1999)13:1(47))
- 42 DEMIR, A., OZTURK, H., EDIP, K., STOJMANOVSKA, M., BOGDANOVIC, A. Effect Of Viscosity Parameter On The Numerical Simulation Of Reinforced Concrete Deep Beam Behavior. The Online Journal Of Science And Technology. Volume 8, Issue 3. 2018.

- 43 DRAVESH, Y., PRASHANTH, M. H. Numerical study on the behaviour of steel fiber reinforced concrete beams for different crack lengths. *Materials Today: Proceedings*. [prehttps://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.410](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.410). ISSN 2214-7853 (2022). pp. 8.
- 44 EHMANN, J. Shear Resistance Of Concrete Bridge Decks In Tension. *Composite Construction In Steel And Concrete, Proceedings Of The 5th International Conference*, Vol. 5, 2006. Pp. 67-76.
- 45 EINPAUL, J. Punching Strength Of Continuous Flat Slabs. Doctoral Thesis. *École Polytechnique Fédérale De Lausanne. Programme Doctoral En Génie Civil Et Environnement*, 2016.
- 46 ELFGREN, L. Fracture Mechancis Of Concrete Structures – From Theory To Application, Report Of The Technical Committee 90, Rilem Edition, 1989.
- 47 ELSTNER, R. C., HOGNESTAD, E. Shearing Strength Of Reinforced Concrete Slabs. *ACI Journal Proceedings*. V. 53, No. 1, 1956. Pp. 11-17.
- 48 EUROCODE 2, Design Of Concrete Structures. European Committee For Standardization, 2004.
- 49 FERREIRA, M. P. Análise Experimental De Lajes Lisas Unidirecionais De Concreto Armado Ao Puncionamento Simétrico Ou Assimétrico. *Dissertação De Mestrado, UFPA*, 2006.
- 50 FERREIRA, M. P. Punção em lisas de concreto armado com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados. Tese de doutorado em estruturas e construção civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Faculdade de Tecnologia. Universidade de Brasília. 2010.
- 51 FERREIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., Efeitos Da Flexão Na Resistência À Punção Em Lajes Com Pilares Retangulares. Verificação De Acordo Com A NB 1/78 e NB 1/03. In: 47º Congresso Brasileiro Do Concreto, Olinda, 2005.
- 52 FORSELL, C., HOLMBERG. Concentrated Loads On Concrete Slabs. *Betong* Vol. 31, N. 2, Stockholm, 1946. Pp. 95 – 123.
- 53 FREITAS, A. G. P., SOUZA, J. D. Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural - ABECE. Parecer Técnico de Pavimento de Uso Comum (PUC) do Edificio Grand Parc Residencial Resort. Vitória - ES, 2018.
- 54 GEORGI POPOV, BRUCE K. LYON, BRUCE HOLLCROFT. Failure Mode and Effects Analysis. *Risk Assessment: A Practical Guide to Assessing Operational Risks*, Second Edition. Wiley online library. 15 December 2021
- 55 GILBERT, R.I., SAKKA, Z.I. Strength and ductility of reinforced concrete slabs containing welded wire fabric and subjected to support settlement. *Eng Struct* 2010;32: 1509–21.
- 56 GOMES, R. B. Punching Resistance Of Reinforced Concrete Flat Slabs With Shear Reinforcement. Tese De Doutorado. The Polytechnic Of Central London. 1991.
- 57 GRAF, O. Tests Of The Strength Of Reinforced Concrete Slabs Supported At All Sides And Subjected To Concentrated Loads. *Deutscher Ausschuss Fur Eisenbeton*, Heft 88, Berlim, 1938, 22p.

- 58 GUPTA, S., LIN, Y.A., LEE, H.J., BUSCHECK, J., WU, R., LYNCH, J. P., LOH, K. J. . In situ crack mapping of large-scale self-sensing concrete pavements using electrical resistance tomography. *Cement and Concrete Composites*, 2021, 122p.
- 59 H.D. CHENG, J.R. CHEN, C. GLAZIER, Y.G. HU, Novel approach to pavement cracking detection based on fuzzy set theory, *J. Comput. Civ. Eng.* 13 (4) (1999) 270–280.
- 60 HALLGREN, M., Punching Shear Tests On Reinforced High Strength Concrete Slabs. Technical Report 1994: 14, Department Of Structural Engineering, Royal Institute Of Technology, Stockholm, 1994.
- 61 HASSAN, A., MAHMUD, G., ZHENJUN, Y. Experimental And Numerical Studies Of Size Effects Of Ultra High Performance Steel Fibre Reinforced Concrete (UHPRC) Beams. *Construction and Building Materials*, 48, 2013. Pp. 1027-1034.
- 62 HAWKINS, N. M., FALSSEN, H. B., HINOJOSA, R. C., Influence Of Column Rectangularity On The Behaviour Of Flat Plate Structures. Publication Sp-30, *ACI Journal*, Detroit, 1971.
- 63 HAWKINS, N. M., MITCHELL, D. Progressive Collapse Of Flat Plate Structures. *ACI Journal*, Vol. 76, No. 7, 1979. Pp. 775-808.
- 64 HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN Incorporation. *Abaqus/Standard User's Manual*. Pawtucket, 6th Edition. 2004.
- 65 HLOBIL, M.; SMILAUER, V.; CHANVILLARD, G. Micromechanical multiscale fracture model for compressive strength of blended cement pastes. *Cem. Concr. Res.* 2016, 83, 188–202.
- 66 HOGNESTAD, E. Yield-Line Theory For The Ultimate Flexural Strength Of Reinforced Concrete Slabs. *ACI Journal Proceedings*. Volume: 49, Issue: 3. 1953. Pp. 637-656.
- 67 HORDIJK, D. Tensile And Tensile Fatigue Behavior Of Concrete; Experiments, Modeling And Analyses, *Heron*. N. 37, 1992. Pp. 3–79.
- 68 HOSMER, D. W., & LEMESHOW, S. (2000). *Applied logistic regression*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- 69 HUANG, Z., BURGESS, I. W., & J. PLANK, R. (2000). Effective stiffness modelling of composite concrete slabs in fire. *Engineering Structures*, 22(9), 1133–1144.
- 70 INGERSLEV, A. The Strength Of Rectangular Slabs. *The Institution Of Structural Engineers Journal*. Westminster. 1923.
- 71 JANG J.I., KANG S.M. Punching shear behavior of shear reinforced slab– column connection with varying flexural reinforcement. *Int J Concr Struct M* 2019;13:29.
- 72 JANKOWIAK, T., LODYGOWSKY, T. Identification Of Parameters Of Concrete Damage Plasticity Constitutive Model. *Foundations Of Civil And Environmental Engineering*, N. 6. 2005. Pp 53-69.
- 73 JOLDES, G. R., WITTEK, A., MILLER, K. An Efficient Hourglass Control Implementation For The Uniform Strain Hexahedron Using The Total Lagrangian Formulation. *Communications In Numerical Methods In Engineering*. Vol. 24, 2008. Pp 1315-1323.

- 74 KIM-HUNG, PHO. Improvements of the Newton–Raphson method. *JCAM. Journal of Computational and Applied Mathematics* 408 (2022) 114106. pp. 16.
- 75 KING, S., DELATTE, N. Collapse of 2000 Commonwealth Avenue: Punching Shear Case Study. *J.Perform.Constr.Facil. Structural Engineering Commons*. 2004. pp. 18(1), 54-61
- 76 KINNUNEN, S. NYLANDER, H. Punching Of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement, *Transactions*, No. 158, Royal Institute Of Technology, 1960. Pp. 12 – 18.
- 77 KIRKPATRICK, J., RANKIN, G. I. B., LONG, A. E. Strength Evaluation Of M-Beam Bridge Deck Slabs. *The Structural Engineer*, Vol. 62, No. 3, 1984, Pp. 60–68.
- 78 KUPFER H., HILSDORF H.,K., RUSCH H., Behavior Of Concrete Under Biaxial Stresses, *ACI Journal*, N. 65, Vol. 8. 1979. Pp. 656-666.
- 79 L. MICHEL, E. FERRIER, D. BIGAUD, A. AGBOSSOU. Criteria for punching failure mode in RC slabs reinforced by externally bonded CFRP. *Composite Structures*. 81 (2007) 438–449.
- 80 LADNER, M., SCHAEIDT, W., Gut, S. Experimental Study On Reinforced Concrete Flat Slabs. *Empa Bericht*, No. 205, Switzerland, 1977, 96p.
- 81 LANGENDONCK, T.V., *Teoria Elementar Das Charneiras Plásticas*. São Paulo, Vol. I, 1970.
- 82 LANTSOGHT, E. O. L. Shear In Reinforced Concrete Slabs Under Concentrated Loads Close To Supports. Doctoral Thesis. Faculty Of Civil Engineering And Geosciences. Delft University Of Technology. 2013.
- 83 LANTSOGHT, E. O. L., Veen, C., Walraven, J. C. Shear In One-Way Slabs Under Concentrated Load Close To Support. *ACI Structural Journal*. 110 (2). 2013.
- 84 LEDO, M. M. Análise experimental à punção de lajes lisas tipo BubbleDeck com pilar interno. [Distrito Federal] 2016. xxi, 119p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2016). Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.
- 85 LEE, J., FENVES, G. Plastic-Damage Model For Cyclic Loading Of Concrete Structures. *Journal Of Engineering Mechanics, ASCE*. Vol. 124. N. 8. 1998. Pp. 892-900.
- 86 LESSMANN, S., BAESSENS, B., SEOW, H. V., & THOMAS, L. C. (2015). Benchmarking state-of-the-art classification algorithms for credit scoring: An update of Research. *European Journal of Operational Research*, 247(1), 124-136.
- 87 LEVINE, D.M.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. *Estatística; Teoria e aplicações*. Rio de Janeiro, LTC, 2000.
- 88 LIMA NETO, A. F. Punção em lajes cogumelo de concreto armado com capitéis. Tese de doutorado em estruturas e construção civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Faculdade de Tecnologia. Universidade de Brasília. 2012.

- 89 LIPS, S. FERNÁNDEZ RUIZ, M. MUTTONI, A. Experimental Investigation On Punching Strength And Deformation Capacity Of Shear-Reinforced Slabs. *ACI Structural Journal*, Vol. 109, Pp. 889-900. 2012.
- 90 LIU, T., HUANG, H., & YANG, Y. (2020). Crack Detection of Reinforced Concrete Member Using Rayleigh-Based Distributed Optic Fiber Strain Sensing System. *Advances in Civil Engineering*, 2020, 1–11. doi:10.1155/2020/8312487
- 91 Liu, Y., & Yeoh, J. K. W. (2021). Robust pixel-wise concrete crack segmentation and properties retrieval using image patches. *Automation in Construction*, pg 123.
- 92 LOOV, R.E., Design Of Precast Connections, Presentation At A Seminar Organized By Compa International Pte. Ltd., Singapore, 1978.
- 93 LUBELL, A.S., SHERWOOD, E.G., BENTZ, E.C, COLLINS, M.P. One-Way Shear Strength Of Thick Slabs And Wide Beams. *ACI Structural Journal*, Vol. 103, No. 6. 2006. Pp.794-802.
- 94 LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S., ONATE, E., 1989. A Plastic-Damage Model For Concrete. *International Journal Of Solids And Structures*. Vol. 25, N. 3, P. 299-326.
- 95 MADUREIRA, E. L. SIQUEIRA, T. M. RODRIGUES, E. C. Creep strains on reinforced concrete columns. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*. São Paulo - SP. 2013.
- 96 MALM, R. Shear Cracks in Concrete Structures Subjected to in-plane stresses. Doctoral Thesis. Royal Institute of Technology (KTH). Department of Civil and Architectural Engineering. Division of Structural Design and Bridges. Stockholm, Sweden, 2006.
- 97 MANG, H., LACKNER, R., MESCGJE, G., MOSLER, J. Computational Modelling Of Concrete Structures. *Comprehensive Structural Integrity*. Vol. 3.10, 2003. Pp. 518-589.
- 98 MCKILLEN, R. R., BRADING, K. F., WILLIAMS, A. MEASUREMENT OF INTERNAL STRAIN IN CONCRETE. *Atomic power Constructions and Heston Laboratories Strain*, 4(1), 1967. pp. 24–29.
- 99 MCPEAKE, F. A., Post-punching resistance of internal slab-column connection, Department of Civil Engineering, Queen’s University of Belfast, B.Sc. Honours Project, 107 p., May, 1980.
- 100 MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. *Concreto: Estrutura, Propriedades, E Materiais*. 1 Ed. São Paulo: Pini, 1994.
- 101 MELO, G. S., REGAN, P. E., Post-punching resistance of connections between flat slabs and interior columns, *Magazine of Concrete Research*, Vol. 50 No 4, pp. 319-327, UK, December, 1998.
- 102 MENETREY, P. Relationship between flexural and punching failure. *ACI Structural Journal*. V. 95, N 4, 1998, pp. 412-419.
- 103 MIRZAEI Y., MUTTONI, A. Tests of the post-punching behavior of the reinforced concrete flat slabs, *IS-BETON*, Switzerland, October, 2008.
- 104 MUTTONI, A., SCHWARTZ, J. Behaviour of beams and punching in slabs without shear reinforcement. *IABSE Colloquium*, V. 97, No. 3, 1991. pp. 485 - 491.

- 105 N.-D. HOANG. Detection of surface crack in building structures using image processing technique with an improved Otsu method for image thresholding, *Adv. Civil Eng.* 2018 (2018) 1–10, <https://doi.org/10.1155/2018/3924120>.
- 106 NAVARRO, M., IVORRA, S., VARONA, F. B. Parametric Computational Analysis For Punching Shear In RC Slabs. *Engineering Structures*. Vol. 165. 2018. Pp 254-263.
- 107 OGLIARI, P. J., PACHECO, J. A. *Análise Estatísticas Usando o Statistica 6.0*. UFSC. Departamento de Informática e Estatística. Florianópolis, 2011.
- 108 OLIVEIRA, D. R. C. *Análise Experimental De Lajes Cogumelo De Concreto Armado Com Armadura De Cisalhamento Ao Puncionamento*. Dissertação De Mestrado, Departamento De Engenharia Civil E Ambiental, Universidade De Brasília, 1998.
- 109 OLIVEIRA, D. R. C. *Análise Experimental De Lajes Cogumelo De Concreto Armado Com Pilares Retangulares*. Tese De Doutorado. Departamento De Engenharia Civil E Ambiental, Universidade De Brasília, 2003.
- 110 OLIVEIRA, D. R. C., DAMASCENO, L. S. R. Previsão Do Modo De Ruptura De Lajes Lisas Unidirecionais De Concreto Armado Com Pilares Retangulares. *Revista Sul-Americana De Engenharia Estrutural*. V. 12. 2015. Pp. 26 – 45.
- 111 OLONISAKIN, A. A., ALEXANDER, S. D. B. Mechanism Of Shear Transfer In A Reinforced Concrete Beam. *Canadian Journal Of Civil Engineering*, Vol. 26, No. 6, 1999. Pp. 810-817.
- 112 PALHARES, R. A. *Análise Experimental da Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Variação da Ancoragem da Armadura de Cisalhamento*. [Brasília, Distrito Federal] 2018. xxii, 156 p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
- 113 PAOLO RUGARLI. *Failure Modes. Steel Connection Analysis*. Chapter 8, Wiley online library. 16 February 2018.
- 114 PARK, R. E GAMBLE, W. L., *Reinforced Concrete Slabs*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1980.
- 115 PEREIRA FILHO, M. J. M., FREITAS, M. V. P., SANTOS, D. F. A., NASCIMENTO, A. J. C., FERREIRA, M. P. Slabs strengthened for punching shear with post-installed steel and CFRP connectors. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.* 12 (03), 2019. PP. 1 - 15.
- 116 PINTO, V. C. *Análise Experimental De Lajes Lisas Unidirecionais De Concreto Armado Com Pilares Retangulares Ao Puncionamento*. Dissertação De Mestrado, Programa De Pós-Graduação Em Engenharia Civil, Universidade Federal Do Pará, 2015.
- 117 RAMOS, A.P., LUCIO, V. J. G., Post-punching behaviour of prestressed concrete flat slabs, *Magazine of Concrete Research*, Vol. 60, No. 4, pp. 245-251, May, 2008.
- 118 RAN CAO, S.M., EL-TAWIL, F. S., AGRAWAL, M. A. K. Miami Pedestrian Bridge Collapse: Computational Forensic Analysis. *Journal of Bridge Engineering*. 2020. Vol. 25, Iss. 1 . pp 1-17.

- 119 RAN CAO, S.M., SHERIF EL-TAWIL, F., ANIL KUMAR AGRAWAL, M. Miami Pedestrian Bridge Collapse: Computational Forensic Analysis. *Journal of Bridge Engineering*, 2020, 25(1): 04019134.
- 120 RANKIN, G. I. B. LONG, A. E. Predicting The Punching Strength Of Conventional Slab-Column Specimens, In: *Proceedings Of Institution Of Civil Engineers*, Part 1, Vol. 82, April 1987.
- 121 REGAN, P. E. *Punching Shear In Prestressed Concrete Slab Bridges*. Polytechnic Of Central London, 1983.
- 122 REGAN, P. E. Shear Combs Reinforcement Against Punching. *The Structural Engineer*, V 63, 1985. Pp. 76-84.
- 123 REGAN, P. E., REZAI-JORABI, H. Shear Resistance Of One-Way Slabs Under Concentrated Loads. *ACI Structural Journal*, No. 85-S18, P. 150-157, 1988.
- 124 REGAN, P.E. *Shear Resistance Of Concrete Slabs At Concentrated Loads Close To Supports*. Engineering Structures Research Group, Polytechnic Of Central London, London, United Kingdom, 1982. Pp.- 24.
- 125 REINECK, K.-H. Modelling The Shear Behaviour And Size Effect Of Structural Concrete Members Without Transverse Reinforcement. *CEB Bulletin* 237, 1997. Pp. 185-197.
- 126 REIBEN, K. HEGGER, J. Experimental Study On The Shear Capacity Of Concrete Slabs. *Proceedings Of IABSE*. 2011. Pp 8.
- 127 RICHART, F. E., KLUGE, R.W., 1939. Tests Of Reinforced Concrete Slabs Subjected To Concentrated Loads: A Report Of An Investigation. *The Engineering Experiment Station Bulletin*, Vol. 36, No. 85, University Of Illinois, Urbana, 86 Pp.
- 128 ROESLER, J., BARENBERG, E. Effect of Static and Fatigue Cracking on Concrete Strain Measurements. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1999. pp. 51–60.
- 129 RUIZ, M. F. MUTTONI, A. Application Of Critical Shear Crack Theory To Punching Of Reinforced Concrete Slabs With Transverse Reinforcement. *ACI Structural Journal*, N. 106, 2009. P. 9-14.
- 130 SACRAMENTO, P. V. P., Ferreira, M. P., Oliveira, D. R. C., Melo, G. S. S. A. Punching Strength Of Reinforced Concrete Flat Slabs Without Shear Reinforcement. *IBRACON Structures And Materials Journal*. Vol. 5. N. 5. 2012. P. 659-691.
- 131 SANTOS JUNIOR, P. S. M. Análise Computacional de lajes lisas de concreto armado submetidas às ações verticais e horizontais. *Dissertação de mestrado*. Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Campinas, 2019.
- 132 SCHAEFER, R. J. Chapter 33: Mechanical Properties of Rubber *in Harris' Shock and Vibration Handbook*. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2002.
- 133 SCHULZ, J. C. Finite Element Hourglassing Control. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol 21. 1985. Pp 1039-1048.

- 134 SCOTT, R. H., GILL, P. A. T. Measurement of internal concrete strains using embedment strain gauges. *Magazine of Concrete Research*, 39(139), 1987. pp. 109–112.
- 135 SHEHATA, I. A. E. M. REGAN, P. E. Punching In RC Slabs. *Journal Of Structural Engineering*. ASCE 115 (7). 1989.
- 136 SHEHATA, I.A.M. Theory of punching in concrete slabs. London. PhD Thesis, The Polytechnic of Central London. 1985.
- 137 STEIN, T. GHALI, A. DILGER, W. Distinction between punching and flexural failure modes of flat plates. *ACI Structural Journal*. V. 104, N. 3, 2007, pp. 357 - 365.
- 138 SZELĄG, M. (2020). Evaluation of Cracking Patterns in Cement Composites—From Basics to Advances: A Review. *Materials*, 13(11), 2490. doi:10.3390/ma13112490
- 139 TAKAHASHI, Y. E KAKUTA, Y. Effect Of Free Edge On Punching Strength Of Reinforced Concrete Slabs. *Transactions Of The Japan Concrete Institute*, V.5, 1983, P. 255-260.
- 140 TALBOT, A. N. Reinforced Concrete Wall Footings And Column Footings. Bulletin N° 67, Engineering Experiment Station, University Of Illinois, Urbana, 1913.
- 141 TASDEMIR, M. A. TASDEMIR, C. AKYÜZA, S. JEFFERSON, A. D. LYDON, F. D. BARR, B. I. G. Evaluation of strains at peak stresses in concrete: A three-phase composite model approach. *Cement and Concrete Composites*. Volume 20, Issue 4, 1998, Pages 301-318.
- 142 TASSINARI L., SAGASETA J., RUIZ M. F., MUTTONI A. Non-Axis-Symmetrical Punching Shear Around Internal Columns Of RC Slabs Without Transverse Reinforcement. *Magazine Of Concrete Research*. Volume 63 Issue 6. 2011. Pp. 441-457
- 143 THEODORAKOPOULOS, D. D., SWAMY, R.N. Ultimate Punching Shear Strength Analysis Of Slab-Column Connections. *Cement & Concrete Composites*, Vol. 24, No. 6, 2002. Pp. 509-521.
- 144 VAZ RODRIGUES, R., FERNÁNDEZ RUIZ, M., MUTTONI, A. Shear Strength Of R/C Bridge Cantilever Slabs. *Engineering Structures*, Vol. 30, 2008, Pp. 3024–3033.
- 145 VILHENA, A. E. R., NAHUN, K. A. R., PERES, M. D., OLIVEIRA, D. R. C. Análise Experimental De Lajes Unidirecionais Com Pilares Retangulares Ao Puncionamento Simétrico. *Anais Do 48º Congresso Brasileiro Do Concreto*, 2006.
- 146 WOOD, J. G. M. Report: Quantitative Study of the Causes of the Partial Collapse - Pipers Row Car Park. *Structural Studies & Design*. Northbridge House, 1997.
- 147 ZARARIS, P. D., PAPADAKIS, G. C. Diagonal Shear Failure And Size Effect In RC Beams Without Web Reinforcement. *Journal Of Structural Engineering-ASCE*. Vol. 127, No. 7, 2001. Pp. 733-742.
- 148 ZEVIANI, W. M., RIBEIRO JR., P. J., BONAT, W. H. Modelos de regressão não linear. 58º RBRAS e 15º SEAGRO. *Laboratório de Estatística e Geoinformação*. Departamento de Estatística. Universidade Federal do Paraná. 2013.

- 149 ZHOU, C., CHASE, J. G., RODGERS, G. W., HUANG, B., XU, C. Effective Stiffness Identification for Structural Health Monitoring of Reinforced Concrete Building using Hysteresis Loop Analysis. *Procedia Engineering*. 2017. 199, 1074–1079.
- 150 ZHOU, L., HUANG, Y., CHEN, B. (2021). Punching shear behavior of slab–column connections embedded with steel skeletons. *Structures*, 33, 2879–2892.

Sites visitados:

- 151 <https://www.ccaps.umn.edu/documents/cpe-conferences/structural/2021StructuralNTSB.pdf>
visitado em 26 de julho de 2022.
- 152 <https://www.nts.gov/investigations/Pages/HWY18MH009.aspx>
visitado em 22 de julho de 2022.

13. ANEXOS

13.1. Memória de cálculo - modelo

Modelos de cálculo:

* Identificação: Laje modelo (BRANCO, 2022)

Dados:

$$d_x := 95\text{mm} \quad d_y := 82.5\text{mm}$$

$$d := \frac{d_x + d_y}{2} = 88.75\text{mm}$$

$$a := 85\text{mm} \quad \leftarrow \text{menor lado do pilar} \quad b := 85\text{mm} \quad \leftarrow \text{maior lado do pilar}$$

$$l_w := 1600\text{mm} \quad l_x := 1600\text{mm} \quad \leftarrow \text{vão principal} \quad l_y := 1800\text{mm} \quad \leftarrow \text{vão secundário}$$

$$f_{ck} := 28\text{MPa} \quad f_{ys} := 573\text{MPa} \quad E_s := 243.83\text{GPa}$$

$$\rho_x := 0.93\% \quad \rho_y := 0.59\%$$

$$\rho := \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0.741\% \quad \rho_1 := \rho$$

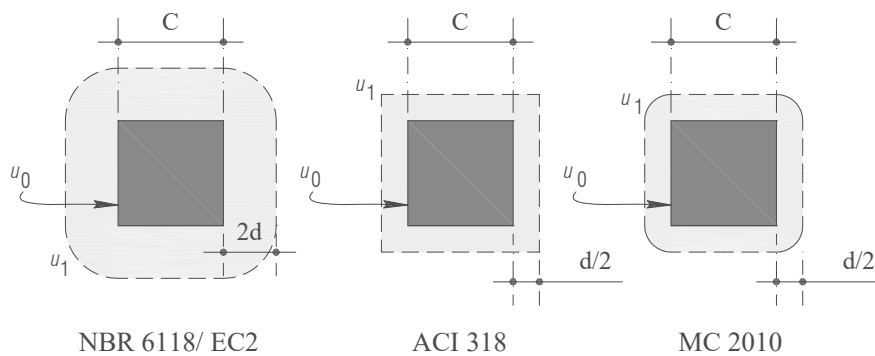
$$A_s := \rho \cdot d_x \cdot l = 1.126 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\frac{A_s}{d_x \cdot l} = 0.741\%$$

$$P_u := 183.29\text{kN}$$

$$P_{\text{flex}} := 202.9\text{kN}$$

2 - Perímetros de controle:



ACI 318

$$b_0 := 2 \cdot (a + b) + 4d = 0.695 \cdot \text{m}$$

EC2 / NBR 6118

$$u_1 := 2 \cdot (a + b) + 4\pi d = 1.455 \times 10^3 \cdot \text{mm}$$

MC2010

$$b_1 := 2 \cdot (a + b) + \pi d = 618.816 \cdot \text{mm}$$

3 - Verificação ACI 318 (2011):

$$\beta := \frac{b}{a} = 1 \quad \leftarrow (22.6.5.2) \text{ relação entre o maior e o menor lado do pilar.}$$

$$\alpha_s := 40 \quad \leftarrow (22.6.5.3) \text{ The value of alfa(s) is 40 for interior columns, 30 for edge columns, and 20 for corner columns.}$$

$$V_{c1} := \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\text{MPa}} \cdot b_0 \cdot d = 163.193 \cdot \text{kN}$$

$$V_{c2} := \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\alpha_s \cdot d}{b_0} + 2\right) \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\text{MPa}} \cdot b_0 \cdot d = 193.327 \cdot \text{kN}$$

$$V_{c3} := \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_0 \cdot d \cdot \sqrt{\text{MPa}} = 108.795 \cdot \text{kN}$$

$$P_{ACI} := \min(V_{c1}, V_{c2}, V_{c3}) = 108.795 \cdot \text{kN}$$

4 - Verificação NBR 6118 (2014):

$$K := 1 + \sqrt{\frac{20\text{cm}}{d}} = 2.501$$

$$V_{Rk.cNBR} := 0.18 \cdot (K) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \cdot \text{MPa}^{\frac{2}{3}} = 1.237 \cdot \text{MPa}$$

$$V_{RmaxNBR} := 0.27 \cdot f_{ck} \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250\text{MPa}}\right) \cdot [2 \cdot (a + b)] \cdot d = 202.573 \cdot \text{kN}$$

$$P_{NBR} := \begin{cases} (V_{Rk.cNBR} \cdot u_1 \cdot d) & \text{if } V_{Rk.cNBR} \cdot u_1 \cdot d < V_{RmaxNBR} \\ V_{RmaxNBR} & \text{otherwise} \end{cases} = 159.76 \cdot \text{kN}$$

5 - Verificação EUROCODE 2 (2004):

$$\gamma_c := 1 \quad k_1 := 0.15 \quad \sigma_{cp} := 0 \text{ MPa}$$

$$k := \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{20\text{cm}}{d}} & \text{if } 1 + \sqrt{\frac{20\text{cm}}{d}} < 2 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases} = 2$$

$$C_{Rd,c} := \frac{0.18}{\gamma_c} = 0.18$$

$$\rho_{EC2} := \begin{cases} \rho & \text{if } \rho < 2 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases} = 7.407 \times 10^{-3}$$

$$V_{Rk,cEC2} := C_{Rd,c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_{EC2} \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \text{MPa}^{\frac{2}{3}} + k_1 \cdot \sigma_{cp} = 0.989 \cdot \text{MPa}$$

$$V_{RmaxEC2} := 0.3 \cdot f_{ck} \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250\text{MPa}}\right) \cdot [2 \cdot (a + b)] \cdot d = 225.081 \cdot \text{kN}$$

$$P_{EC2} := \begin{cases} (V_{Rk,cEC2} \cdot u_1 \cdot d) & \text{if } V_{Rk,cEC2} \cdot u_1 \cdot d < V_{RmaxEC2} \\ V_{RmaxEC2} & \text{otherwise} \end{cases} = 127.748 \cdot \text{kN}$$

6 - Verificação MC 2010 (2011):

$$k_e := 1 \quad \text{para pilares de centro}$$

$$b_{MC2010} := k_e \cdot b_1 = 618.816 \cdot \text{mm}$$

$$d_g := 19\text{mm}$$

$$d_{g0} := 16\text{mm}$$

$$k_{dg} := \begin{cases} \frac{32}{\frac{d_{g0}}{\text{mm}} + \frac{d_g}{\text{mm}}} & \text{if } \frac{32}{\frac{d_{g0}}{\text{mm}} + \frac{d_g}{\text{mm}}} \geq 0.75 \\ 0.75 & \text{otherwise} \end{cases} = 0.914$$

If the size of the maximum aggregate particles is not less than 16 mm, this parameter may be taken as $k_{dg} = 1.0$.

$$\psi := 0.014 \text{ rad} \quad (\text{Obtida por análise não linear})$$

$$k_{\psi} := \begin{cases} \frac{1}{1.5 + 0.9k_{dg} \cdot \psi \cdot \frac{d}{\text{mm}}} & \text{if } \frac{1}{1.5 + 0.9k_{dg} \cdot \psi \cdot \frac{d}{\text{mm}}} < 0.6 = 0.396 \\ 0.6 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V_{Rk.MC2010} := k_{\psi} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\text{MPa}} = 2.098 \cdot \text{MPa}$$

$$P_{MC2010} := k_{\psi} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\text{MPa}} \cdot b_{MC2010} \cdot d = 115.211 \cdot \text{kN}$$

7 - Teoria da fissura crítica (MUTTONI, 2008):

$$V_{TFCC} := \frac{3}{4} \cdot \frac{b_{MC2010} \cdot d \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \text{MPa}^{\frac{1}{2}}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} = 142.223 \cdot \text{kN}$$

$$P_{TFCC} := V_{TFCC} = 142.223 \cdot \text{kN}$$

8 - Verificação Oliveira (2003):

$$\lambda := 0.93 \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^{0.14} = 0.924$$

$$P_{OLI} := \left(\frac{0.18}{\lambda}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200\text{mm}}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \cdot \text{MPa}^{\frac{2}{3}} \cdot u_1 \cdot d = 172.827 \cdot \text{kN}$$

9 - Verificação Pflex:

$$m_u := \rho_x \cdot f_{ys} \cdot d_x^2 \cdot \left(1 - 0.59 \cdot \rho_x \cdot \frac{f_{ys}}{f_{ck}}\right) = 42.693 \cdot \text{kN}$$

$$P_{flex} := \frac{4 \cdot l_y \cdot m_u}{l_x - a} = 202.898 \cdot \text{kN}$$

10 - Resultados:

$$P_{ACI} = 108.795 \cdot \text{kN} \quad P_{NBR} = 159.76 \cdot \text{kN} \quad P_{EC2} = 127.748 \cdot \text{kN} \quad P_{OLI} = 172.827 \cdot \text{kN}$$

$$P_{MC2010} = 115.211 \cdot \text{kN} \quad P_{TFCC} = 142.223 \cdot \text{kN} \quad P_u = 183.29 \cdot \text{kN} \quad P_{flex} = 202.898 \cdot \text{kN}$$

13.2. Dados da modelagem *FEM-CDP*

TENSAO x DEFORMACAO INELASTICA CONCRETO (COMPRESSÃO)

11.62471	0.00000
20.00505	0.00025
25.33322	0.00055
27.78652	0.00096
28.00000	0.00115
27.52879	0.00147
24.71166	0.00207
19.47564	0.00277
14.00000	0.00335
7.73687	0.00421
5.40597	0.00480
4.01632	0.00535
3.11274	0.00588
2.48873	0.00641
2.03817	0.00692
1.70145	0.00744
1.44278	0.00795
1.23954	0.00845
1.07681	0.00896
0.94441	0.00946
0.83519	0.00997
0.74401	0.01047

TENSAO x ABERTURA FISSURA CONCRETO (TRACAO)

1.746	0.0000
1.380	0.0100
1.096	0.0200
0.881	0.0300
0.721	0.0400
0.601	0.0500
0.513	0.0600
0.447	0.0700
0.396	0.0800
0.357	0.0900
0.325	0.1000
0.298	0.1100
0.273	0.1200
0.251	0.1300
0.230	0.1400
0.209	0.1500
0.189	0.1600
0.170	0.1700
0.152	0.1800
0.134	0.1900
0.117	0.2000
0.100	0.2100
0.085	0.2200
0.070	0.2300
0.057	0.2400
0.045	0.2500
0.033	0.2600
0.022	0.2700
0.013	0.2800
0.004	0.2900

DANO CONCRETO x DEFORMACAO INELASTICA CONCRETO (COMPRESSAO)

0.00000	0.00000
0.09037	0.00025
0.14751	0.00055
0.21570	0.00096
0.24682	0.00115
0.29850	0.00147
0.40115	0.00207
0.53177	0.00277
0.65667	0.00335
0.81297	0.00421
0.87638	0.00480
0.91409	0.00535
0.93789	0.00588
0.95363	0.00641
0.96446	0.00692
0.97216	0.00744
0.97778	0.00795
0.98198	0.00845
0.98518	0.00896
0.98766	0.00946
0.98962	0.00997
0.99119	0.01047

DANO x ABERTURA FISSURA CONCRETO (TRACAO)

0.000000	0.0000
0.209863	0.0100
0.372108	0.0200
0.495215	0.0300
0.587345	0.0400
0.655718	0.0500
0.706385	0.0600
0.744205	0.0700
0.772953	0.0800
0.795467	0.0900
0.813815	0.1000
0.829458	0.1100
0.843387	0.1200
0.856246	0.1300
0.868425	0.1400
0.880140	0.1500
0.891491	0.1600
0.902500	0.1700
0.913152	0.1800
0.923407	0.1900
0.933220	0.2000
0.942549	0.2100
0.951361	0.2200
0.959632	0.2300
0.967350	0.2400
0.974515	0.2500
0.981135	0.2600
0.987226	0.2700
0.992811	0.2800
0.997918	0.2900

CONCRETO

DENSIDADE 2.4E-009

MODULO 26630 POISSON 0.2

DILATAÇAO 38

EXCENTRICIDADE 0.1

RELACAO FB0/FC0 1.16

K 0.667

VISCOSIDADE 0.002

NEOPRENE

MODULO 1.5 POISSON 0.25

AÇO

DENSIDADE 7.85E-009

MODULO 243830 POISSON 0.3

YIELD 573 STRAIN 0

13.3. Análise gráfica das nove lajes experimentais

Desempenho das normas técnicas para P_u/P_{norma} .

